ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΑΒΒΑΤΟ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ενδεικτικές απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1.

Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Έχουμε για $h\neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}=\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=2x+h$$

Οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x+0=2x$$

Επομένως $f'(x)=2x$.

Α2. Διάμεσος (δ) ενός δείγματος *ν* παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το *ν* είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το *ν* είναι άρτιος αριθμός.

Α3.

α. ΛΑΘΟΣ

β. ΣΩΣΤΟ

γ. ΛΑΘΟΣ

Α4.

α. $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

β. $\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\overline{x}=\dfrac{25+10+5+20+15}{5}=\dfrac{75}{5}=15$

Επίσης $R=25-5=20$.

Β2. $s^2=\dfrac{(25-15)^2+(10-15)^2+(5-15)^2+(20-15)^2(15-15)^2}{5}$

$s^2=\dfrac{100+25+100+25}{5}=\dfrac{250}{5}=50$

Β3. $CV=\dfrac{s}{\overline{x}}=\dfrac{\sqrt{50}}{15}=\dfrac{5\sqrt{2}}{15}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Επειδή $CV=\dfrac{\sqrt{2}}{3}>\dfrac{1}{10}$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=x^3-9x^2+\alpha x+1,\ x\in\mathbb{R}$$

Γ1. Ο ρυθμός μεταβολής της f για $x=1$ ισούται με το $f'(1)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=3x^2-18x+\alpha$.

Άρα $f'(1)=0\Leftrightarrow -15+\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=15$.

Γ2. Για $\alpha=15$ είναι $f(x)=x^3-9x^2+15x+1$, $x\in\mathbb{R}$

και $f'(x)=3x^2-18x+15$

α΄ τρόπος

Έστω $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένη στο σημείο $M(2,f(2))$

Όμως $f(2)=3$

και $\lambda=f'(2)=-9$.

Το σημείο $M(2,f(2))$ ανήκει στην εφαπτομένη.

Άρα $f(2)=-9\cdot 2+\beta\Leftrightarrow 3=-18+\beta\Leftrightarrow \beta=21$.

Άρα $y=-9x+21$ είναι η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M(2,f(2))$.

β΄ τρόπος:

Εξίσωση εφαπτομένης στο $M\left(2,f\left(2\right)\right)$

ε: $y-f\left(2\right)=f'\left(2\right)\left(x-2\right)\Leftrightarrow y-3=-9\left(x-2\right)\Leftrightarrow y=-9x+21$.

Γ3. $f\left(x\right)=x^3-9x^2+15x+1$, $x\in\mathbb{R}$

$f'\left(x\right)=3x^2-18x+15=3\left(x^2-6x+5\right)$, $x\in\mathbb{R}$

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 3\left(x^2-6x+5\right)=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=5$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			τ.μ. $=f\left(1\right)$		τ.ε. $=f\left(5\right)$		

(Η $f'\left(x\right)$ ως τριώνυμο 2^{ου} βαθμού γίνεται θετική εκτός των ριζών της και αρνητική εντός.)

- Η f είναι γν. αύξουσα στα διαστήματα $\Delta_1=\left(-\infty,1\right]$ και $\Delta_3=\left[5,+\infty\right)$ και γν. φθίνουσα στο $\Delta_2=\left[1,5\right]$.
- Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=1$ ίσο με $f\left(1\right)=8$ και τοπικό ελάχιστο για $x=5$ ίσο με $f\left(5\right)=-24$.

Γ4. $$\lim_{x\to 1}\frac{f'\left(x\right)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x^2-6x+5\right)}{x^2-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{3\cancel{\left(x-1\right)}\left(x-5\right)}{\cancel{\left(x-1\right)}\left(x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x-5\right)}{x+1}=-\frac{12}{2}=-6$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το πεδίο ορισμού της $f(x)$ αποτελείται από εκείνα τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία

$x+1\neq 0$

$x\neq -1$.

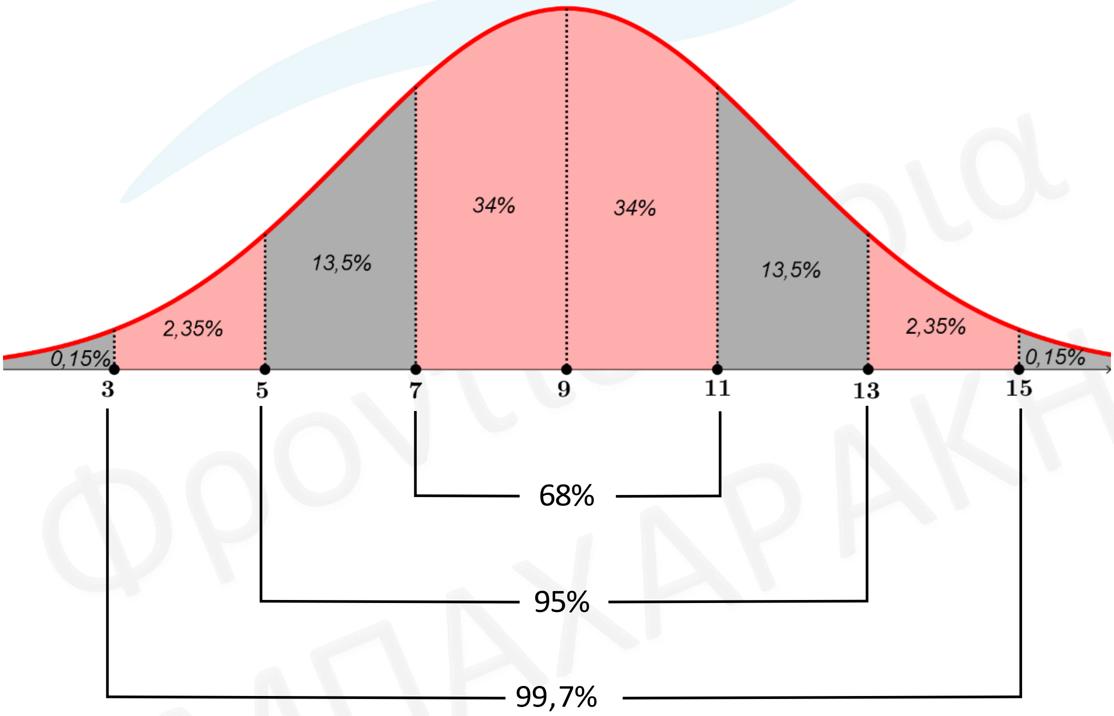
Άρα $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$.

$$f'(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)'=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2},\ x\neq -1.$$

Δ2. Είναι $f'(2)=\frac{1}{(2+1)^2}=\frac{1}{9}$ άρα $\bar{x}=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{\frac{1}{9}}=9.$

Είναι $f'(1)=\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{1}{4}$ άρα $s=\frac{1}{2f'(1)}=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$

Δ3.



Με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος έχουμε ότι από 5 έως 11 λεπτά χρόνο επιστροφής είχε το 81,5% των μαθητών. Οπότε το ζητούμενο πλήθος είναι

$\kappa_1=\frac{81{,}5}{100}\cdot 2000=1630$ μαθητές.

Επίσης πάνω από 15 λεπτά χρόνο επιστροφής είχε το $50\%-\frac{99,7}{2}\%=0,15\%$ των μαθητών. Οπότε το ζητούμενο πλήθος είναι

$$\kappa_2=\frac{0,15}{100}\cdot 2000=3 \text{ μαθητές.}$$

Δ4. Αφού ο χρόνος επιστροφής των μαθητών αυξάνεται κατά 3 λεπτά η νέα μέση τιμή θα είναι

$$\bar{y}=\bar{x}+3=9+3=12$$

και η νέα τυπική απόκλιση θα είναι

$$s_y=s=2.$$