φροντιστήρια **Μπαχαρακη**

η εκπαίδευση στις καλύτερες στιγμές της

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Σχολικό Βιβλίο σελ. 186 το Θεώρημα

- Κάθε συνάρτηση της μορφής G(x) = F(x) + c, όπου $c \in R$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού

  $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν

  $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε

  $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

  Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

  $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

Α2.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Σχολικό βιβλίο σελ. 142

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$f'(x_0) = 0$

Α3.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Σχολικό βιβλίο σελ. 161

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ είναι $-\infty$ ή $+\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Α4. **α.** Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0$

ΣΩΣΤΟ

β. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1], παραγωγίσιμη στο (0,1) και $f'(x)\neq 0$, για όλα τα $x\in(0,1)$, τότε $f(0)\neq f(1)$.

ΣΩΣΤΟ

γ. Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $R_2=R-\{x/\eta\mu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$

ΣΩΣΤΟ

δ. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=1$

ΛΑΘΟΣ

ε. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε $D_f=(-\infty,1]$ και $D_g=[0,+\infty)$ οπότε

$$D_h=\{x\in D_g: g(x)\in D_f\}=\begin{Bmatrix} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} x\geq 0 \\ \sqrt{x}\leq 1 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} x\geq 0 \\ x\leq 1 \end{Bmatrix}=[0,1]$$

Ο τύπος της συνάρτησης h είναι

$h(x)=(fog)(x)=f(g(x))=\left(\sqrt{x}\right)^4-2\left(\sqrt{x}\right)^2+1=x^2-2x+1=(x-1)^2$ με $x\in[0,1]$

Β2. Για κάθε $x\in[0,1]$ η συνάρτηση h είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Έχουμε $h'(x)=2x-2=2(x-1)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$ επομένως η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ άρα και "1–1" οπότε αντιστρέφεται.

Επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ το πεδίο τιμών της είναι $h(A)=[h(1),h(0)]=[0,1]$ που είναι και το πεδίο ορισμού της h^{-1}

Για $y\in[0,1]$ έχουμε

$$y=h(x)\Leftrightarrow y=(x-1)^2\Leftrightarrow\sqrt{y}=|x-1|\Leftrightarrow\sqrt{y}=-x+1\Leftrightarrow x=1-\sqrt{y}$$

Επομένως ο τύπος της αντίστροφης είναι

$h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}\ ,\ x\in[0,1]$

Β3. **i.** Για κάθε $x\in[0,1)$ η συνάρτηση φ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης

$$\lim_{x\to1^-}\phi(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{h^{-1}(x)}{1-x}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)'}{(1-x)'}=\lim_{x\to1^-}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-1}=\frac{1}{2}$$ δηλαδή

$\lim\limits_{x\to1^-}\phi(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1^-}\phi(x)=\phi(1)$. Άρα η φ είναι συνεχής και στο $x_0=1$ και τελικά συνεχής στο [0,1]. Ακόμη $\phi(0)=\frac{h^{-1}(0)}{1-0}=\frac{1-\sqrt{0}}{1}=1$ και $\phi(1)=\frac{1}{2}$ δηλαδή $\phi(0)\neq\phi(1)$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών για την συνάρτηση φ στο διάστημα [0,1].

ii. Για κάθε $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}\overset{\eta\mu\nearrow}{\Rightarrow}\eta\mu\frac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1$ δηλαδή

$\frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1\Leftrightarrow\phi(1)<\eta\mu\alpha<\phi(0)$ άρα από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών για την φ στο διάστημα [0,1] υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $\phi(x_0)=\eta\mu\alpha$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.
- Αν $x<-1$ έχουμε $f'(x)=-2\Rightarrow f'(x)=(-2x)'$ οπότε υπάρχει $c_1\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x)=-2x+c_1,\ x\leq-1$ αφού η f είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]$.
- Αν $x>-1$ έχουμε $f'(x)=3x^2-1\Rightarrow f'(x)=\left(x^3-x\right)'$ οπότε υπάρχει $c_2\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x)=x^3-x+c_2,\ x<-1$. Επιπλέον η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα το $f(0)=0\Leftrightarrow0^3-0+c_2=0\Leftrightarrow c_2=0$

Επομένως, έχουμε $f(x)=\begin{cases}-2x+c_1, & x<-1\\ f(-1), & x=-1\\ x^3-x\ , & x>-1\end{cases}$.

φροντιστήρια ΜΠΑΧΑΡΑΚΗ

Όμως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο -1, οπότε :

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$ (1)

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (-2x + c_1) = 2 + c_1$
- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x^3 - x) = 0$

Από την σχέση (1) προκύπτει πως $2 + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -2$ και $f(-1) = 0$

Τελικά $f(x) = \begin{cases} -2x-2 \ , \ x<-1 \\ 0 \ , \ x=-1 \\ x^3 - x \ , \ x>-1 \end{cases} = \begin{cases} -2x-2 \ , \ x\le -1 \\ x^3 - x \ , \ x>-1 \end{cases}$.

Γ2.

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της Cf στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

(ε): $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1)(x - x_0)$

Η ευθεία διέρχεται από το σημείο (0,–2) οπότε για x=0 και y=–2 έχουμε

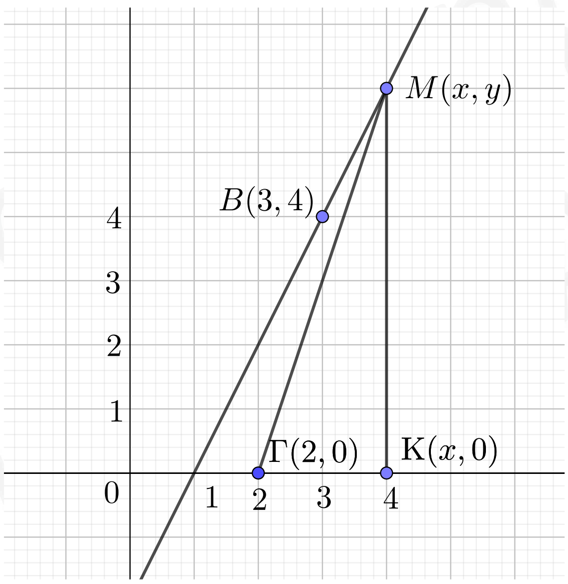
$-2 - x_0^3 + x_0 = (3x_0^2 - 1)(0 - x_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 - x_0^3 + \cancel{x_0} = -3x_0^3 + \cancel{x_0} \Leftrightarrow 2x_0^3 = 2 \Leftrightarrow x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης στο (1,f(1)) είναι

(ε): $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 0 = 2(x - 1) \Leftrightarrow \boxed{y = 2x - 2}$

Γ3.



Το τρίγωνο ΜΚΓ είναι ορθογώνιο οπότε έχει εμβαδόν

$E_{MK\Gamma} = \dfrac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \dfrac{(\Gamma K)\cdot(MK)}{2} = \dfrac{(x-2)y}{2}$ με $y = 2x - 2$

Επειδή το σημείο Μ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε) έχει συντεταγμένες $M\left(x(t),y(t)\right)$ με $y(t)=2x(t)-2$ και $x'(t)=2$ και τη στιγμή t_0 που διέρχεται από το σημείο Β(3,4) έχουμε $x(t_0)=3$, $x'(t_0)=2$, οπότε

$$E(t)=\frac{(x(t)-2))(2x(t)-2)}{2}=\frac{1}{2}\left(2x^2(t)-6x(t)+4\right)=x^2(t)-3x(t)+2 \text{ επομένως}$$

$$E'(t\ )=\left(x^2(t)-3x(t)+2\right)'=2x(t)x'(t)-3x'(t) \text{ και για } t=t_0 \text{ έχουμε}$$

$$E'(t_0)=2x(t_0)x'(t_0)-3x'(t_0)=2\cdot3\cdot2-3\cdot2=\boxed{6\mu^2/s}$$

Γ4. Έχουμε $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]$.

- Για το $I_1=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right]$ θέτουμε $f(x)=\omega$ με $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$ οπότε όταν $x\to-\infty$ τότε $\omega\to+\infty$

  Οπότε $I_1=\lim\limits_{\omega\to+\infty}\left[\frac{\eta\mu\omega}{\omega}\right]=0$ αφού

  $$\left|\frac{\eta\mu\omega}{\omega}\right|=\frac{|\eta\mu\omega|}{|\omega|}\le\frac{1}{|\omega|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|\omega|}\le\frac{\eta\mu\omega}{\omega}\le\frac{1}{|\omega|}$$

  Έτσι :

- $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\left(-\frac{1}{|\omega|}\right)=0$

- $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\left(\frac{1}{|\omega|}\right)=0$, επομένως σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής και

  $$I_1=\lim_{\omega\to+\infty}\left[\frac{\eta\mu\omega}{\omega}\right]=0$$

- Για το $I_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]$ θέτουμε $-x=\omega$ με $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ οπότε όταν $x\to-\infty$ τότε $\omega\to+\infty$

  Επομένως $I_2=\lim\limits_{\omega\to+\infty}\left[\frac{f(\omega)}{1+\omega^3}\right]=\lim\limits_{\omega\to+\infty}\left[\frac{\omega^3-\omega}{1+\omega^3}\right]=\lim\limits_{\omega\to+\infty}\left[\frac{\omega^3}{\omega^3}\right]=\lim\limits_{\omega\to+\infty}1=1$

Τελικά $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]=I_1+I_2=0+1=1$

φροντιστήρια ΜΠΑΧΑΡΑΚΗ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i)

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$.

Επομένως,

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}=0 \Leftrightarrow x=1 .$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x-1>0 \Leftrightarrow x>1$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}<0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x-1<0 \Leftrightarrow 0<x<1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
f		$\searrow$	O.E	$\nearrow$	

- Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(0,1]$ το πεδίο τιμών της είναι

$$f(\Delta_1)=f((0,1])=\left[f(1),\lim_{x\to 0^+}f(x)\right)=[1-\ln 3,+\infty) \text{ για κάθε } x\in\Delta_1 \text{ αφού}$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-\ln(3x))\overset{(1)}{=}+\infty$$

Για το $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln(3x))$ θέτουμε u=3x οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}u=\lim_{x\to 0^+}(3x)=0 \text{ και } \lim_{x\to 0^+}(\ln(3x))=\lim_{u\to 0^+}(\ln(u))=-\infty \quad (1)$$

- Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[1,+\infty)$ το πεδίο τιμών της είναι

$$f(\Delta_2)=f([1,+\infty))=\left[f(1),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=[1-\ln 3,+\infty) \text{ για κάθε } x\in\Delta_2 \text{ αφού}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-\ln(3x))=\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1-\frac{\ln(3x)}{x}\right)\right)\overset{(2)}{=}+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x)}{x}\underset{\text{D.L.H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{3x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln(3x)}{x}\right)=1 \quad (2)$$

φροντιστήρια ΜΠΑΧΑΡΑΚΗ

- $0\in f(\Delta_1)$ άρα υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 το x_1 είναι μοναδικό στο Δ_1 και
- $0\in f(\Delta_2)$ άρα υπάρχει $x_2\in(1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα το x_2 είναι μοναδικό στο Δ_2

ii) Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με

$$f'(x)=1-\frac{1}{x} \quad \text{και } f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$$

Συνεπώς η f είναι κυρτή συνάρτηση.

Δ2. Αφού η συνάρτηση f έχει ακριβώς δύο ρίζες τις x_1 και x_2, με $x_1<1<x_2$, ως συνεχής συνάρτηση, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα (x_1,x_2), το οποίο είναι αρνητικό επειδή

$$f(1)=1-\ln 3<0\,.$$

Έτσι,

$$E(\Omega)=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx=\int_{x_1}^{x_2}-f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}-(x)'f(x)dx=$$

$$=\left[-xf(x)\right]_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}xf'(x)dx=-x_2\cancel{f(x_2)}^{0}+x_1\cancel{f(x_1)}^{0}+\int_{x_1}^{x_2}x\left(1-\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}(x-1)dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{x_1}^{x_2}=\frac{{x_2}^2}{2}-x_2-\left(\frac{{x_1}^2}{2}-x_1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left({x_2}^2-{x_1}^2-2x_2+2x_1\right)=\frac{1}{2}\left((x_2-x_1)(x_2+x_1)-2(x_2-x_1)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)$$

Δ3.

Ισχύει ότι $x_1<1$ άρα $-x_1>-1$ οπότε $2-x_1>1$.

Επίσης το εμβαδόν Ε από το προηγούμενο ερώτημα είναι θετικό.

Έτσι λοιπόν, έχουμε

$$\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)>0$$

Φροντιστήρια ΜΠΑΧΑΡΑΚΗ

Όμως $x_2 > x_1$ άρα $x_2 - x_1 > 0$. Οπότε,

$x_1 + x_2 - 2 > 0$ άρα $x_2 > 2 - x_1$.

Τελικά, $1 < 2 - x_1 < x_2$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, x_2]$

Έχουμε

$f(2 - x_1) < f(x_2)$ δηλαδή $f(2 - x_1) < 0$.

Δ4.

Η δοθείσα σχέση γίνεται

$$2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow f(x) - (1 - \ln 3) = -f(x) + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(1) = -\left[f(x) - f'(x_2)(x - x_2)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[f(x) - f(1)\right] + \left[f(x) - f'(x_2)(x - x_2)\right] = 0 \quad (1)$$

- Γνωρίζουμε από το Δ1 πως η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 1 οπότε $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) - f(1) \geq 0$ (2) για κάθε $x \in (0, +\infty)$ με το ‘‘=’’ να ισχύει μόνο για x=1.
- Η εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο $(x_2, f(x_2))$ είναι:

$$\varepsilon : y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y - 0 = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$$

Επιπλέον η f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της , οπότε η γραφική της παράσταση είναι πάνω από την εφαπτομένη σε κάθε σημείο με εξαίρεση το σημείο επαφής. Έτσι

$f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow f(x) - f'(x_2)(x - x_2) \geq 0$ (3) για κάθε $x \in (0, +\infty)$

με το ‘‘=’’ να ισχύει μόνο για $x = x_2$.

Οπότε από τη σχέση (1) έχουμε

$f(x) - f(1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και $f(x) - f'(x_2)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow x = x_2$

Όμως $x_2 > 1$ άρα η εξίσωση $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ είναι <u>**αδύνατη**</u>.

Φροντιστήρια ΜΠΑΧΑΡΑΚΗ