φροντιστήρια Μπαχαρακη

η εκπαίδευση στις καλύτερες στιγμές της

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΑΒΒΑΤΟ 1 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

Ενδεικτικές απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο Α, να αποδείξετε ότι: $\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$.

Μονάδες 10

Απάντηση

Α1. Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Τότε ισχύει:

$$F(x+h)-F(x)=\left(f(x+h)+g(x+h)\right)-\left(f(x)+g(x)\right)=\left(f(x+h)-f(x)\right)+\left(g(x+h)-g(x)\right)$$

Για $h\neq 0$ είναι

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Επομένως,

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

Άρα $\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$.

Α2. α) Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_κ$ οι τιμές μίας μεταβλητής X, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $κ \le ν$. Τι ονομάζεται συχνότητα $ν_i$ που αντιστοιχεί στην τιμή x_i, i = 1,2, … , κ;

Μονάδες 3

Απάντηση

Α2. α) **Συχνότητα** $ν_i$ μιας τιμής x_i μιας μεταβλητής X είναι ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων.

Α2. β) Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_ν$ οι τιμές μίας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν και $w_1, w_2, \ldots, w_ν$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας). Να γράψετε τον τύπο του σταθμικού μέσου.

Μονάδες 4

Απάντηση

Α2. β) Ο σταθμικός μέσος δίνεται από τον τύπο

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot w_1 + \ldots + x_ν \cdot w_ν}{w_1 + \ldots + w_ν} = \frac{\sum_{i=1}^{ν} x_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{ν} w_i}.$$

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η συνάρτηση $f(x) = x$ έχει παράγωγο στο $x_0 = 0$.

β. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής.

γ. Ισχύει $(ημx)' = συνx$.

δ. Οι ποσοτικές μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί, διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

Μονάδες 8

Απάντηση

Α3) **α)** Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3}$, όπου $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 4

Απάντηση

Β1 Είναι $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3}\right)'=x^2-6x+5,\ x\in\mathbb{R}$.

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 6) και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων (μον. 4).

Μονάδες 10

Απάντηση

Β2. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι

$$\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot5=36-20=16>0$$

και άρα το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{6\pm4}{2}=\begin{cases}\frac{6+4}{2}=\frac{10}{2}=5\\ \frac{6-4}{2}=\frac{2}{2}=1\end{cases}$$

Συνεπώς, κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας της f

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $[5,+\infty)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,5]$.

- Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 1$ με τιμή

$$f(1) = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 + 5\cdot 1 + \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

- Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 5$ με τιμή

$$f(5) = \frac{1}{3}\cdot 5^3 - 3\cdot 5^2 + 5\cdot 5 + \frac{1}{3} = -8$$

Β3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

Μονάδες 7

Απάντηση

Β3. Η εξίσωση εφαπτομένης της f στο $A(0, f(0))$ είναι της μορφής $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ όπου

$$\lambda = f'(0) = 0^2 - 6\cdot 0 + 5 = 5.$$

Επιπλέον,

$$A \in (\varepsilon) \Rightarrow f(0) = \lambda\cdot 0 + \beta \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot 0^3 - 3\cdot 0^2 + 5\cdot 0 + \frac{1}{3} = \beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{3}$$

Άρα $(\varepsilon): y = 5x + \frac{1}{3}$.

Β4. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$.

Μονάδες 4

Απάντηση

Β4. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$ με

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1) = (-1)^2 - 6\cdot(-1) + 5 = 12.$$

ΘΕΜΑ Γ

Το πρωί μίας ημέρας οι τιμές της θερμοκρασίας (σε $^{\circ}C$) σε 5 πόλεις της Ελλάδας ήταν: 22, 18, 20 + κ, 14, 16, όπου κ πραγματικός αριθμός.

Ο συντελεστής μεταβολής των παραπάνω τιμών είναι CV = 20% και η τυπική απόκλιση είναι ίση με $s=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+6x-7}{2x-2}$.

Γ1. Να δείξετε ότι s = 4.

Μονάδες 6

Απάντηση

Γ1. Είναι

$$s=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{2x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+7)}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+7}{2}=\frac{1+7}{2}=4.$$

Γ2. Να δείξετε ότι η μέση τιμή των παραπάνω τιμών της θερμοκρασίας είναι $\bar{x}$ = 20.

Μονάδες 4

Απάντηση

Γ2. Έχουμε

$$CV=20\%\Leftrightarrow\frac{s}{\bar{x}}=0,2\Leftrightarrow\frac{4}{\bar{x}}=0,2\Leftrightarrow 4=0,2\cdot\bar{x}$$

$$\Leftrightarrow\bar{x}=\frac{4}{0,2}\Leftrightarrow\bar{x}=\frac{40}{2}\Leftrightarrow\bar{x}=20.$$

Γ3. Να δείξετε ότι κ = 10 (μον. 6) και να βρείτε τη διάμεσο δ (μον. 3).

Μονάδες 9

Απάντηση

Γ3. Αφού $\bar{x}=20\Leftrightarrow\dfrac{22+18+20+\kappa+14+16}{5}=20$

$$\Leftrightarrow\frac{90+\kappa}{5}=20\Leftrightarrow 90+\kappa=100\Leftrightarrow\kappa=10.$$

Για $\kappa=10$ οι παρατηρήσεις είναι

$$22,\ 18,\ 30,\ 14,\ 16.$$

Τις διατάσσουμε σε αύξουσα σειρά και έχουμε

$$14,\ 16,\ 18,\ 22,\ 30.$$

Αφού το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός (*5 παρατηρήσεις*) η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση που αντιστοιχεί στην **$3^η$ παρατήρηση**.

Δηλαδή,

$$\delta = 18.$$

Γ4. Αν το μεσημέρι της ίδιας ημέρας οι παραπάνω τιμές της θερμοκρασίας αυξήθηκαν κατά 10%, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής των νέων τιμών της θερμοκρασίας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Γ4. Αν x_i είναι οι αρχικές τιμές της θερμοκρασίας τότε οι τιμές αυτής αυξημένες κατά 10% θα είναι

$$y_i = x_i + \frac{10}{100}x_i = x_i + 0{,}1x_i = 1{,}1x_i.$$

Η νέα μέση τιμή είναι

$$\bar{y} = 1{,}1 \cdot \bar{x} = 1{,}1 \cdot 20 = 22.$$

Η νέα τυπική απόκλιση είναι

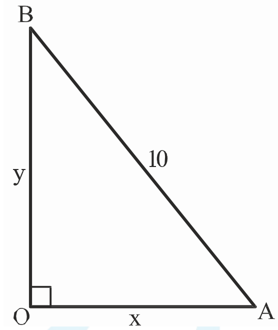
$$s_y = 1{,}1 \cdot s = 1{,}1 \cdot 4 = 4{,}4.$$

Ο συντελεστής μεταβολής των νέων τιμών της θερμοκρασίας είναι

$$CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{4{,}4}{22} = \frac{44}{220} = \frac{2}{10} = 0{,}2 = 20\%.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ με $O = 90^\circ$, κάθετες πλευρές μήκους $(OA) = x$, $(OB) = y$ και υποτείνουσα μήκους $(AB) = 10$.

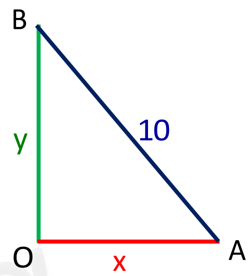


Δ1. Να δείξετε ότι η πλευρά y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από τον τύπο: $y = f(x) = \sqrt{100 - x^2}$ (μον. 3) και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (μον. 4).

Μονάδες 7

Απάντηση

Δ1. Αφού το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε ότι



$$(OA)^2 + (OB)^2 = (AB)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10^2 \Leftrightarrow y^2 = 100 - x^2$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{100 - x^2}.$$

Οπότε, $y = f(x) = \sqrt{100 - x^2}$.

Είναι $x > 0$ (ως μήκος πλευράς) καθώς και

$$y > 0 \Leftrightarrow \sqrt{100 - x^2} > 0 \Leftrightarrow 100 - x^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 > -100 \Leftrightarrow x^2 < 100 \Leftrightarrow |x| < 10 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0 < x < 10.$$

Οπότε, $D_f = (0, 10)$.

Δ2. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης y = f(x), ως προς x, όταν x = 8.

Μονάδες 6

Απάντηση

Δ2. Είναι

$$f'(x)=\left(\sqrt{100-x^2}\right)'=\frac{\left(100-x^2\right)'}{2\sqrt{100-x^2}}=\frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{100-x^2}} \text{ με } x\in(0,10).$$

Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $y=f(x)$ ως προς x, όταν $x=8$ είναι

$$f'(8)=-\frac{8}{\sqrt{100-8^2}}=-\frac{8}{\sqrt{100-64}}=-\frac{8}{\sqrt{36}}=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}.$$

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 6}\frac{f(x)-8}{x-6}$.

Μονάδες 6

Απάντηση

Δ3. Είναι $\lim\limits_{x\to 6}\frac{f(x)-8}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{100-x^2}-8}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{100-x^2}-8\right)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{100-x^2-64}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{36-x^2}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{(6-x)(6+x)}{-(6-x)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{6+x}{-\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}$$

$$=\frac{6+6}{-\left(\sqrt{100-6^2}+8\right)}=\frac{12}{-\left(\sqrt{64}+8\right)}=-\frac{12}{16}=-\frac{3}{4}.$$

Δ4. Αν $x_1 = 2,3$, $x_2 = 3,5$ και $x_3 = 2,8$ είναι τιμές της πλευράς x, να αιτιολογήσετε ότι: $f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$.

Απάντηση

Δ4. Είναι $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{100 - x^2}} < 0$ για κάθε $x \in (0,10)$.

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,10)$.

Ισχύει ότι $0 < 2,3 < 2,8 < 3,5 < 10$ οπότε

$$f(2,3) > f(2,8) > f(3,5) \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$$

και αποδείχτηκε το ζητούμενο.