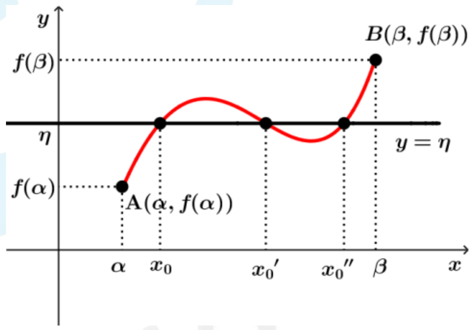
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ενδεικτικές απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta,\ x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:



- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

Αφού

$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$

$g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

Α2. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

Α3. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$$

Α4. **α)** Σωστό **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $D_f=\{x\in D_g\cap D_h \,/\, h(x)\neq 0\}=\{x\in[1,+\infty)\,/\,h(x)\neq 0\}$.

$$\text{Για } x\geq 1 \text{ είναι } h(x)=0\Leftrightarrow \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1.$$

Οπότε $D_f=(1,+\infty)$ με $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}=\dfrac{\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=\dfrac{\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}}{\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}}=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Είναι $D_r=D_g\cap D_h=[1,+\infty)$ με $r(x)=g(x)h(x)=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=x-\dfrac{1}{x}$.

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=-\dfrac{2}{(x-1)^2}<0$ για κάθε $x>1$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε και 1-1 δηλαδή αντιστρέφεται.

$$D_{f^{-1}}=f(D_f)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to1^+}f(x)\right)=(1,+\infty) \text{ αφού}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$
- $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\left[(x+1)\dfrac{1}{x-1}\right]=+\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)=2$

  και

  $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0$ με $x-1>0$ για x κοντά στο 1 με $x>1$ άρα $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$.

  $y=f(x)\Leftrightarrow y=\dfrac{x+1}{x-1}\Leftrightarrow yx-y=x+1\Leftrightarrow yx-x=y+1$

  $\Leftrightarrow x(y-1)=y+1\Leftrightarrow x=\dfrac{y+1}{y-1}=f^{-1}(y).$

Αφού $D_f=D_{f^{-1}}=(1,+\infty)$ και $f(x)=f^{-1}(x)$ συμπεραίνουμε ότι $f=f^{-1}$.

Β3. Η $r(x)$ είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ άρα η C_r δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{r(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}1=1=\lambda.$$

$$\lim_{x\to+\infty}(r(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0=\beta.$$

Οπότε η ευθεία $\varepsilon: y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_r στο $+\infty$.

Β4. Πρέπει $x>1$ και $f(x)>1$ που ισχύει για κάθε $x>1$ αφού $f(D_f)=(1,+\infty)$.

Η εξίσωση

$$\Big(\underbrace{f^{-1}(f(x))}_{x}\Big)^2=1+4r(x)\Leftrightarrow x^2=1+4\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2=1+4x-\frac{4}{x}\Leftrightarrow x^3=x+4x^2-4$$

$$\Leftrightarrow x^3-x-4x^2+4=0\Leftrightarrow x(x^2-1)-4(x^2-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2-1)=0\Leftrightarrow \underbrace{x=-1 \text{ ή } x=1}_{\text{απορρίπτονται}} \text{ ή } x=4.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της άρα είναι συνεχής και στο $x_0=2$. Συνεπώς, ισχύει:

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)=f(2) \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε τα όρια:

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\left(-2x+4+e^\lambda\right)=-4+4+e^\lambda=e^\lambda$$

και

$$f(2)=\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\left(-x^2+4x-3+\lambda\right)=-4+8-3+\lambda=\lambda+1$$

και άρα από την (1), πρέπει $e^\lambda=\lambda+1\Leftrightarrow e^\lambda-\lambda-1=0$. (2)

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=e^x-1$, $x\in\mathbb{R}$. Επιπλέον,

$$g'(x)=0\Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow e^x=e^0\Leftrightarrow x=0$$

και $g'(x)>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$ και $g'(x)<0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$

Άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_1=0$ με τιμή $g(0)=0$ και έτσι $g(x)\geq g(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Δηλαδή στην (2) $\Leftrightarrow g(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda=0$. Επομένως, αντικαθιστώντας στον τύπο της f προκύπτει:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+5 \ , 0\leq x<2\\ -x^2+4x-3 \ , x\geq 2\end{cases}$$

Γ2. Για $x\in[0,2)$ η $f(x)=-2x+5$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=-2<0$ και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$. Επιπλέον, για $x\in(2,+\infty)$ η $f(x)=-x^2+4x-3$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=-2x+4<0$, διότι $x>2$ και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$. Τέλος, αφού f συνεχής στο $x_0=2$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x=0$ με τιμή $f(0)=5$.

Γ3. **i.** Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα της f στο 2:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+5-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(-2)=-2$$

ενώ

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-3-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-2)^2}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}(-(x-2))=0$$

Συνεπώς, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2 και άρα δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[0,3]$.

ii. Στα προηγούμενα ερωτήματα βρήκαμε ότι

$$f'(x)=\begin{cases}-2 \ , 0\leq x<2\\ -2x+4 \ , x>2\end{cases}$$

Επιπλέον, $f(0)=5$ και $f(3)=0$ άρα η ευθεία που διέρχεται από τα ζητούμενα σημεία έχει συντελεστή διεύθυνσης

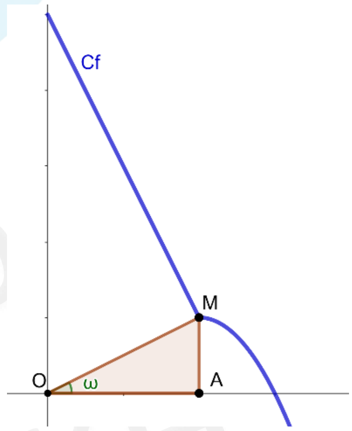
$$\lambda=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{0-5}{3}=-\frac{5}{3}$$

και άρα εξετάζουμε αν η εξίσωση $f'(x)=-\frac{5}{3}$ (3) έχει λύση στο $(0,3)$. Παρατηρούμε ότι για $x\in[0,2)$ είναι $f'(x)=-2$ και άρα η (3) είναι αδύνατη στο $[0,2)$. Από την άλλη, για $x>2$ είναι $f'(x)=-2x+4$ και άρα

$$(3)\Leftrightarrow -2x+4=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow -2x=-4-\frac{5}{3}\Leftrightarrow -2x=-\frac{17}{3}\Leftrightarrow x=\frac{17}{6}\in(2,3)$$

Συνεπώς, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Gamma\left(\frac{17}{6},f\left(\frac{17}{6}\right)\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0,f(0))$ και $E(3,f(3))$.

Γ4. Παρατηρούμε ότι $M(x(t),y(t))$ όπου $x(t)=2$ και $y'(t)=0.5$ μον. / sec από την υπόθεση. Την χρονική στιγμή t_0 που το σημείο M συναντά τη γραφική παράσταση της f ισχύει ότι $x(t_0)=2$ και $y(t_0)=f(2)=1$. Επιπλέον, για τη γωνία $\omega=\omega(t)$ ισχύει ότι $\varepsilon\varphi\omega(t)=\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{y(t)}{2}$ (4), οπότε παραγωγίζοντας προκύπτει:



$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}\cdot\omega'(t)=\frac{y'(t)}{2}\Rightarrow\left(\varepsilon\varphi^2\omega(t)+1\right)\cdot\omega'(t)=\frac{y'(t)}{2}\overset{(4)}{\Rightarrow}\left(\frac{y^2(t)}{4}+1\right)\cdot\omega'(t)=\frac{y'(t)}{2}\quad(5)$$

και άρα για $t=t_0$ στην (5):

$$\left(\frac{1}{4}+1\right)\cdot\omega'(t_0)=\frac{0.5}{2}\Rightarrow\frac{5}{4}\omega'(t_0)=\frac{1}{4}\Rightarrow\omega'(t_0)=\frac{1}{5}\ \text{rad/sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Η παράγωγός της είναι

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)x-\ln x-\alpha x}{x^2}=\frac{1+\alpha x-\ln x-\alpha x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

Οπότε έχουμε

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow \boxed{x=e}$$

Και το πρόσημό της είναι

$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow 0<x<e$ και

$f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}<0\Leftrightarrow \ln x>1\Leftrightarrow x>e$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	Ο.Μ.	$\searrow$	

Η συνάρτηση f για $x=e$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(e)$.

Όμως το σύνολο τιμών της f είναι το $\left(-\infty,1+\frac{1}{e}\right]$ οπότε και

$$f(e)=1+\frac{1}{e}\Leftrightarrow\frac{\ln e+\alpha e}{e}=1+\frac{1}{e}\Leftrightarrow\frac{1}{e}+\alpha=1+\frac{1}{e}\Leftrightarrow\alpha=1.$$

Δ2. Για $\alpha=1$ έχουμε $f(x)=\frac{\ln x+x}{x}=\frac{\ln x}{x}+1$ με $x>0$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών άρα και στο $\left[\frac{1}{2},1\right]\subseteq(0,+\infty)$

Επίσης $f(1)=\frac{\ln 1}{1}+1=1>0$ και

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+1=-2\ln 2+1=\ln e-\ln 4<0$$

Επομένως $f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(1)<0$.

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano για την f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}\ ,\ 1\right]\subseteq(0,e)$ όπου η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in\left(\frac{1}{2}\ ,\ 1\right)$ ώστε $f(x_0)=0$.

Επιπλέον, η f είναι γν. φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2=[e,+\infty)$ άρα

$$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),f(e)\right]=\left(1,1+\frac{1}{e}\right]$$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x+x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{LH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)=1$.

Παρατηρούμε ότι $0\notin f(\Delta_2)$ άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\geq e$ οπότε x_0 μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Δ3. **i)**

- Για $x\in\Delta_1=(0,e]$ η f είναι 1-1

  Ισχύει ότι $f(2)=\frac{\ln 2+2}{2}=\frac{2(\ln 2+2)}{2\cdot 2}=\frac{2\ln 2+4}{4}=\frac{\ln 4+4}{4}=f(4)$.

  Η εξίσωση $f(x)=f(4)\Leftrightarrow f(x)=f(2)\Leftrightarrow x=2$.

- Για $x\in\Delta_2=[e,+\infty)$ η f είναι 1-1 και η εξίσωση

$$f(x)=f(4)\Leftrightarrow x=4.$$

Τελικά η εξίσωση $f(x)=f(4)$ έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $x_1=2$ και $x_2=4$.

ii)

- Στο διάστημα $\Delta_1=(0,e]$ η ανίσωση

$$2^x\leq x^2\Leftrightarrow \ln 2^x\leq \ln x^2\Leftrightarrow x\ln 2\leq 2\ln x\overset{:2x>0}{\Leftrightarrow}\frac{\ln 2}{2}\leq\frac{\ln x}{x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\ln 2}{2}+1\leq\frac{\ln x}{x}+1\Leftrightarrow f(2)\leq f(x)\ \ (1).$$

- Για $x\in\Delta_1=(0,e]$ η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε

  (1) $\Leftrightarrow 2\leq x\leq e$.

- Στο διάστημα $\Delta_2=[e,+\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε

(1) $\overset{f(2)=f(4)}{\Leftrightarrow} f(x)\geq f(4)\Leftrightarrow e\leq x\leq 4.$

Τελικά η ανίσωση **(1)** αληθεύει για κάθε $x\in[2,4]$.

Δ4. Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου Ω είναι .

$$E(\Omega)=\int_{-\ln2}^{0}|g(x)|dx=\int_{-\ln2}^{0}\left|f(e^x)\frac{1-x}{e^x}\right|dx$$

Θέτουμε $u=e^x \Leftrightarrow x=\ln u$ με $dx=\frac{1}{u}du$.

Για $x=-\ln2$ είναι $u=e^{-\ln2}=e^{\ln\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$.

Για $x=0$ είναι $u=e^0=1$.

Οπότε,

$$E(\Omega)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(u)\frac{1-\ln u}{u}\right|\cdot\frac{1}{u}du\overset{\frac{1}{u}>0}{=}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(u)\frac{1-\ln u}{u^2}\right|du$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(u)f'(u)|du\overset{f'(u)>0 \text{ για κάθε } x\in\left[\frac{1}{2},1\right]}{=}\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(u)|f'(u)du.$$

Στο **Δ2)** αποδείξαμε ότι η f έχει μοναδική ρίζα $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

Οπότε $f(x)>0\Leftrightarrow f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow 1\geq x>x_0$ και $f(x)<0\Leftrightarrow f(x)<f(x_0)\Leftrightarrow \frac{1}{2}\leq x<x_0$.

Έτσι λοιπόν είναι

$$E(\Omega)=\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}\left(-f(u)f'(u)\right)du+\int_{x_0}^{1}\left(f(u)f'(u)\right)du$$

$$=\left[-\frac{f^2(u)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0}+\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{x_0}^{1}=-\frac{f^2(x_0)}{2}+\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2}+\frac{f^2(1)}{2}-\frac{f^2(x_0)}{2}$$

$$\overset{f(x_0)=0}{=}\frac{(1-\ln4)^2+1}{2} \text{ τ.μ.}$$