

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ενδεικτικές απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:
- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
 - κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Απόδειξη

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ διότι $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
- Έστω G μια παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$. Άρα σύμφωνα με το πόρισμα της παρ. 2.6, υπάρχει σταθερά c , ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

- A2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

Μονάδες 5

Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[α,β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$
- τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (α,β)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$.

A3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι “1-1”. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} , της f είναι το σύνολο τιμών της f .
- β)** Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- γ)** Αν $v \in \mathbb{N}^*$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v}} = -\infty$.
- δ)** Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.
- ε)** Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Μονάδες 10

(α)	(β)	(γ)	(δ)	(ε)
Σ	Σ	Λ	Λ	Σ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Δίνεται ακόμα ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$.

B1. Να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 5

Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, άρα από Θ. Fermat ισχύει $f'(1) = 0$. Επιπλέον, $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9$, $x \in \mathbb{R}$ και άρα $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -12 \Leftrightarrow \alpha = -6$.

Στα ερωτήματα B2 και B4 να θεωρήσετε ότι $\alpha = -6$.

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 10

Για $\alpha = -6$ είναι $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Οπότε,

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$$

Συνεπώς, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$.

x	1		3
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

- $f((0,1)) \stackrel{f \nearrow}{\underset{\text{συν.}}{=}} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = (-3, 1)$
- $f([1,3]) \stackrel{f \searrow}{\underset{\text{συν.}}{=}} [f(3), f(1)] = [-3, 1]$
- $f((3,+\infty)) \stackrel{f \nearrow}{\underset{\text{συν.}}{=}} \left(\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-3, +\infty)$

διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -3$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = -3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$.

Επομένως,

- $0 \in f((0,1))$, άρα υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ ώστε $f(x_1) = 0$ και είναι μοναδικό γιατί $f \nearrow$ στο $(0,1) \subseteq (-\infty, 1)$

- $0 \in f([1,3])$, άρα υπάρχει $x_2 \in [1,3]$ ώστε $f(x_2)=0$ και είναι μοναδικό γιατί $f \searrow$ στο $[1,3]$
- $0 \in f((3,+\infty))$, άρα υπάρχει $x_3 \in (3,+\infty)$ ώστε $f(x_3)=0$ και είναι μοναδικό γιατί $f \searrow$ στο $(3,+\infty)$

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 3 θετικές πραγματικές ρίζες x_1, x_2, x_3 .

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

$$f''(x)=6x-12=6(x-2), x \in \mathbb{R}, \text{ άρα } f''(x)=0 \Leftrightarrow x=2.$$

x	2	
$f''(x)$	-	+
$f(x)$		

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$, κυρτή στο $[2, +\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x=2$ με τιμή $f(2)=-1$.

B4. Έστω $g(x)=x+f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Αν $\xi \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$, αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα y/y .

Μονάδες 4

$$g(x)=x+f(x), x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x)-f(x)=x, x \in \mathbb{R}$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ είναι η ευθεία

$$(\varepsilon_1): y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi) \Leftrightarrow y=f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$$

Η εφαπτομένη της C_g στο $B(\xi, g(\xi))$ είναι η ευθεία

$$(\varepsilon_2): y-g(\xi)=g'(\xi)(x-\xi) \Leftrightarrow y=g'(\xi)(x-\xi)+g(\xi)$$

$$\text{Σημείο τομής των } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \Rightarrow f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)=g'(\xi)(x-\xi)+g(\xi)$$

η επικοινωνία είναι καλύτερη διαμέσου της

$$f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi) - g'(\xi)(x-\xi) - g(\xi) = 0$$

$$(x-\xi)(f'(\xi) - g'(\xi)) + f(\xi) - g(\xi) = 0 \quad (1)$$

Από υπόθεση $g(\xi) - f(\xi) = \xi$ και $g'(x) = 1 + f'(x), x \in \mathbb{R}$ άρα $f'(\xi) - g'(\xi) = -1$.

Συνεπώς με αντικατάσταση στην (1): $(x-\xi)(-1) - \xi = 0 \Leftrightarrow -x + \xi - \xi = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Άρα $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται στον γ' .

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x \eta \mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ (μονάδες 2) αλλά όχι παραγωγίσιμη στο x_0 (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Έχουμε,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \eta \mu x = e^0 \eta \mu 0 = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = \sqrt{0^2 + 0} = 0$$

$$f(0) = \sqrt{0^2 + 0} = 0$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ η f συνεχής στο $x_0 = 0$.

Επιπλέον,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \eta \mu x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^x \frac{\eta \mu x}{x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 7

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Έχουμε,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta \mu x) \quad (1)$$

$$\text{Ισχύει } |\eta \mu x| \leq 1 \Leftrightarrow |e^x \eta \mu x| \leq |e^x| \Leftrightarrow -|e^x| \leq e^x \eta \mu x \leq |e^x|$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} |e^x| = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} -|e^x| = 0$ από το κριτήριο παρεμβολής και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta \mu x) = 0$ με συνέπεια η f να έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$ στο $-\infty$.

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{1 + 0} = 1 = \lambda \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Οπότε η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη την $y = x + \frac{1}{2}$ στο $+\infty$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y = x + \frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Μονάδες 5

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x \eta \mu x - x - \frac{1}{2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(-\pi, 0)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x \eta \mu x - x - \frac{1}{2}$ με $x \in [-\pi, 0]$.

Η g είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Επιπλέον,

$$g(-\pi) = e^{-\pi} \eta \mu(-\pi) - (-\pi) - \frac{1}{2} = e^{-\pi} \cdot 0 + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$$

$$g(0) = e^0 \eta \mu 0 - 0 - \frac{1}{2} = 1 \cdot 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

άρα $g(-\pi) \cdot g(0) < 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε

$$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi} \eta \mu \xi - \xi - \frac{1}{2} = 0 \text{ δηλαδή η γραφική παράσταση της } f \text{ τέμνει την ευθεία } (ε) \text{ σε}$$

τουλάχιστον ένα σημείο $\xi \in (-\pi, 0)$.

Γ4. Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq 0$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M , $x'(t)$, να είναι θετικός για κάθε $t \geq 0$. Να εξετάσετε εάν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του M .

Μονάδες 7

Έστω $M(x(t), y(t))$ οι συντεταγμένες του σημείου M με $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$.

Έχουμε,

$$\begin{aligned} (y(t))' &= (\sqrt{x^2(t) + x(t)})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} (x^2(t) + x(t))' \\ &= \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = x'(t) \frac{2x(t) + 1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} \end{aligned}$$

Για να υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ τέτοια ώστε $y'(t_0) = x'(t_0)$ θα πρέπει

$$x'(t_0) \frac{2x(t_0) + 1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} = x'(t_0) \stackrel{x'(t_0) > 0}{\Leftrightarrow} \frac{2x(t_0) + 1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} = 1 \Leftrightarrow 2x(t_0) + 1 = 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} \Leftrightarrow$$

$$(2x(t_0) + 1)^2 = 4(x^2(t_0) + x(t_0)) \Leftrightarrow 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) \Leftrightarrow 1 = 0, \text{ αδύνατο.}$$

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ τέτοια, ώστε $y'(t_0) = x'(t_0)$.

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ και μια παράγουσα F , της f στο $(0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύει:

$$xf(x)=2F(x)\ln x \text{ για κάθε } x>0.$$

Δίνεται ακόμα ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon):y=2x$.

Ισχύει $xf(x)=2F(x)\ln x$ (1) για κάθε $x>0$ και $g(x)=\frac{F(x)}{x^{\ln x}}, x>0$

Επειδή η ευθεία $(\varepsilon) y=2x$ είναι παράλληλη στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f έχουμε

$$\lambda_{\varepsilon\phi M}=\lambda_{\varepsilon}\Leftrightarrow f'(1)=2$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{F(x)}{x^{\ln x}}, x>0$ είναι σταθερή.

Μονάδες 6

Για κάθε $x>0$ έχουμε

$$(x^{\ln x})' = (e^{(\ln^2 x)})' = e^{(\ln^2 x)} \cdot 2 \frac{1}{x} \cdot \ln x = 2 \cdot x^{\ln x} \frac{\ln x}{x}$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{F(x)}{x^{\ln x}} \right)' = \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - F(x)(x^{\ln x})'}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) 2 \cdot x^{\ln x} \frac{\ln x}{x}}{(x^{\ln x})^2} = \\ &= \frac{f(x) - F(x) 2 \frac{\ln x}{x}}{x^{\ln x}} = \frac{x \cdot f(x) - 2 \cdot F(x) \cdot \ln x}{x \cdot x^{\ln x}} \stackrel{(1)}{=} 0 \text{ άρα η συνάρτηση } g \text{ είναι σταθερή στο } (0,+\infty) \end{aligned}$$

Δ2. i) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$. (μονάδες 4)

ii) Να αποδείξετε ότι $F(1)=1$ (μονάδες 3) και $F(x)=x^{\ln x}$, για κάθε $x > 0$. (μονάδες 2)

Μονάδες 9

i) για $x=1$ από τη σχέση (1) έχουμε

$$1 \cdot f(1) = 2F(1)\ln 1 \Rightarrow f(1) = 2F(1) \cdot 0 \Rightarrow f(1) = 0$$

το όριο γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}}{\frac{\ln x}{x - 1}} = \frac{f'(1)}{1} = 2$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 2$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

ii) για κάθε $x > 0$ με x κοντά στο 1 η σχέση (1) δίνει $F(x) = \frac{xf(x)}{2\ln x}$

Η F είναι συνεχής οπότε

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{xf(x)}{\ln x} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \text{ άρα } F(1) = 1$$

Επειδή η συνάρτηση g είναι σταθερή έχουμε $g(x) = c$ για κάθε $x > 0$ επομένως

$$g(1) = c \Rightarrow \frac{F(1)}{1^{\ln 1}} = c \Rightarrow c = \frac{1}{1} \Rightarrow c = 1$$

οπότε

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1 \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x}$$

Δ3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση F (μονάδες 2) και να λύσετε την εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ (μονάδες 3).

Μονάδες 5

Έχουμε
$$F'(x) = (x^{\ln x})' = \left(e^{(\ln^2 x)} \right)' = e^{(\ln^2 x)} \cdot 2 \frac{1}{x} \cdot \ln x = 2 \cdot x^{\ln x} \frac{\ln x}{x}$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x^{\ln x} \frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x^{\ln x} \frac{\ln x}{x} > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ αφού } x > 0 \text{ και } x^{\ln x} > 0$$

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$		0	+
$F(x)$			

Η συνάρτηση F είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Η εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ έχει προφανή λύση την $x=1$

- Για $x > 1$ η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα οπότε

$$x > 1 \Leftrightarrow x^2 > x \Leftrightarrow F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \text{ και}$$

$$x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 < 0$$

Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη

- Όμοια για $0 < x < 1$ η F είναι γνησίως φθίνουσα οπότε έχουμε

$$x < 1 \Leftrightarrow x^2 < x \Leftrightarrow F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \text{ και}$$

$$x < 1 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 < 0$$

Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη

Συνεπώς η εξίσωση έχει μοναδική λύση την προφανή $x=1$

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης F , τις ευθείες $x=1$, $x=e$ και τον άξονα $x'x$ ισχύει $E > 2e - 3$.

Μονάδες 5

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E = \int_1^e |F(x)| dx$

γνωρίζουμε ότι $F(x) = e^{\ln^2 x} > 0$ για κάθε $x > 0$ οπότε $E = \int_1^e F(x) dx$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x + 1$ οπότε αν αντικαταστήσουμε όπου x το $\ln^2 x$ γίνεται $e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$ οπότε :

$$\begin{aligned} \int_1^e F(x) dx &> \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx = \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx = \\ &= \int_1^e (x)' \ln^2 x dx + [x]_1^e = [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x 2 \ln x \frac{1}{x} dx + e - 1 = \\ &= e \ln^2 e - 1 \ln^2 1 - 2 \int_1^e \ln x dx + e - 1 = e - 2 [x \ln x - x]_1^e + e - 1 = \\ &= e - 2 [(e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1)] + e - 1 = e - 2 + e - 1 = 2e - 3 \end{aligned}$$