ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

Ενδεικτικές απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ οι τιμές μίας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \le \nu$. Για τη σχετική συχνότητα f_1 της τιμής x_i, $i = 1,2,...,\kappa$ να αποδείξετε ότι:

$$f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = 1.$$

Μονάδες 6

Απάντηση:

(Σελίδα 65 σχολικό βιβλίο)

ισχύει ότι: $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + ... + \frac{\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$

A2. Να διατυπώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

Απάντηση:

(Σελίδα 87 σχολικό βιβλίο)

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, ορίζεται ως:

- Η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός αριθμός.
- Ο μέσος όρος (το ημιάθροισμα) των δυο μεσαίων παρατηρήσεων, όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

Α3. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και B το σύνολο των $x \in A$, στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η συνάρτηση της πρώτης παραγώγου της f;

Μονάδες 5

Απάντηση:

(Σελίδα 27 σχολικό βιβλίο)

Έστω B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. **Πρώτη παράγωγος της f** λέγεται η συνάρτηση με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Το εύρος θεωρείται αξιόπιστο μέτρο διασποράς.

β. Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) μέγιστο στη θέση $x = x_0$.

γ. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής.

δ. Αν $g(x) \neq 0$ τότε $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)}$.

ε. Σε ένα ιστόγραμμα συχνότητα το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντια άξονα είναι ίσο με το μέγεθος ν του δείγματος.

Μονάδες 10

Απάντηση:

α. Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1,\ \text{όπου } x\in\mathbb{R}$$

Β1. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 4

Απάντηση:

Είναι $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1\right)'=\frac{1}{3}3x^2-2x-3=x^2-2x-3$

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 6) και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων (μον. 4).

Μονάδες 10

Απάντηση:

Άρα $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$

$\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=4+12=16$

$$x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{2\pm4}{2}\ \begin{cases}\nearrow\ x_1=\frac{6}{2}=3\\ \searrow\ x_2=\frac{-2}{2}=-1\end{cases}$$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1,3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-1$ το

$$f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)^2-3(-1)+1=-\frac{1}{3}-1+3+1=-\frac{1}{3}+\frac{9}{3}=\frac{8}{3}$$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για x=3 το

$$f(3)=\frac{1}{3}3^3-3^2-3\cdot3+1=9-9-9+1=-8.$$

Β3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0,f(0))$.

Μονάδες 6

Απάντηση:

Έστω $y=\lambda x+\beta$ η ζητούμενη εφαπτομένη.

Είναι $f'(x)=x^2-2x-3$ και για x = 0 : $f'(0)=0^2-2\cdot 0-3=-3$

Οπότε $\lambda=f'(0)=-3$, άρα η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται

$$y=-3x+\beta$$

Για x = 0 : $f(0)=\frac{1}{3}0^3-0^2-3\cdot 0+1=1$ οπότε A(0,1) το σημείο επαφής.

Για x = 0, y = 1 έχουμε $1=-3\cdot 0+\beta \Leftrightarrow 1=\beta$.

Άρα $y=-3x+1$ η ζητούμενη εφαπτομένη.

Β4. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to -1}\frac{f'(x)}{x+1}.$$

Μονάδες 5

Απάντηση:

Είναι $\frac{f'(x)}{x+1}=\frac{x^2-2x-3}{x+1}$

Οπότε $\lim_{x\to -1}\frac{f'(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)$

Είναι $x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$ οπότε $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

Άρα $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-3)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-3)=-1-3=-4$.

ΘΕΜΑ Γ

Ο αριθμός των βιβλίων που διάβασαν επτά μαθητές στις θερινές διακοπές είναι αντίστοιχα

4, 5, 4, κ, 0, 3, 7 όπου κ φυσικός αριθμός.

Γ1. Αν ο μέσος αριθμός βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές είναι $\bar{x}=4$, να βρείτε τον κ.

Μονάδες 5

Απάντηση:

Είναι $\bar{x}=\dfrac{4+5+4+\kappa+0+3+7}{7} \Leftrightarrow 4=\dfrac{23+\kappa}{7} \Leftrightarrow 23+\kappa=28 \Leftrightarrow \kappa=5$.

Για $\kappa=5$:

Γ2. Να υπολογίσετε τη διάμεσο του δείγματος.

Μονάδες 4

Απάντηση:

Για $\kappa=5$ οι τιμές κατά αύξουσα σειρά είναι 0, 3, 4, 4, 5, 5, 7

Οπότε η διάμεσός τους είναι $\delta=4$.

Γ3. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 του δείγματος.

Μονάδες 10

Απάντηση:

Υπολογίζουμε τη διακύμανση από τον τύπο :

$$s^2=\frac{(t_1-\bar{x})^2+(t_2-\bar{x})^2+\ldots+(t_7-\bar{x})^2}{7}$$

Άρα $s^2=\dfrac{(0-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(5-4)^2+(7-4)^2}{7}$

$$s^2=\frac{(-4)^2+(-1)^2+(0)^2+(0)^2+(1)^2+(1)^2+(3)^2}{8} \Leftrightarrow s^2=\frac{16+1+0+0+1+1+9}{7} \Leftrightarrow$$

$$s^2=\frac{28}{7} \Leftrightarrow s^2=4.$$

Γ4. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

Απάντηση:

Η τυπική απόκλιση είναι : $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{4}=2$

Άρα ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0,5=50\%>0,1$.

Δηλαδή το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, εμβαδού $100m^2$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του οικοπέδου, ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο

$$\Pi(x)=2x+\frac{200}{x},\ \ x>0.$$

Μονάδες 5

Απάντηση:

Το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου είναι: $E=x\cdot y\Leftrightarrow 100=x\cdot y\Leftrightarrow y=\frac{100}{x}$.

Επίσης , οι μεταβλητές x και y εκφράζουν τις διαστάσεις του ορθογωνίου, συνεπώς:

$$x>0 \quad \text{και} \quad y>0\Leftrightarrow\frac{100}{x}>0\Leftrightarrow x>0.$$

Η περίμετρος Π του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi=2x+2y\Leftrightarrow\Pi(x)=2x+2\cdot\frac{100}{x}\Leftrightarrow\Pi(x)=2x+\frac{200}{x},\ x>0.$$

Δ2. Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $\Pi(x)$ (μον. 5) και να αποδείξετε ότι το ορθογώνιο με τη μικρότερη περίμετρο είναι τετράγωνο (μον. 3).

Μονάδες 8

Απάντηση:

Η συνάρτηση $\Pi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο:

$$\Pi'(x)=\left(2x+\frac{200}{x}\right)'=2+\frac{(200)'\cdot x-200\cdot(x)'}{x^2}=2-\frac{200}{x^2}=\frac{2x^2-200}{x^2}\ ,\ \ x>0.$$

$$\Pi'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x^2-200}{x^2}=0\Leftrightarrow 2x^2-200=0\Leftrightarrow 2x^2=200\Leftrightarrow x^2=100\Leftrightarrow x=10 \text{ διότι } x>0.$$

Η συνάρτηση Π είναι:

Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,10]$

Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[10,+\infty)$

x	0	10	$+\infty$
$\Pi'(x)$	$-$	0	$+$
$\Pi(x)$	↘		↗

Επίσης, το ελάχιστο της συνάρτησης Π, δηλαδή της περιμέτρου του ορθογωνίου, παρουσιάζεται όταν $x=10$.

Για $x=10$ είναι $y=\frac{100}{x}=\frac{100}{10}=10$.

Συνεπώς, το ορθογώνιο με την μικρότερη περίμετρο είναι τετράγωνο.

Δ3. Αν x_1, x_2 είναι τιμές της πλευράς του παραπάνω ορθογωνίου με $x_1, x_2\in(0,10)$ και $x_1<x_2$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$A=\frac{\Pi(x_1)-\Pi(x_2)}{x_1-x_2}$$

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

Απάντηση:

Οι τιμές x_1, x_2 ανήκουν στο διάστημα $(0,10)$ όπου η συνάρτηση Π είναι γνησίως φθίνουσα .

Αφού $x_1<x_2\overset{f\searrow}{\Rightarrow}\Pi(x_1)>\Pi(x_2)\Rightarrow\Pi(x_1)-\Pi(x_2)>0$.

Επίσης $x_1<x_2\Rightarrow x_1-x_2<0$.

Με βάση τα παραπάνω, το πρόσημο της παράστασης $A=\frac{\Pi(x_1)-\Pi(x_2)}{x_1-x_2}$ είναι αρνητικό, δηλαδή $A<0$.

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 10}\frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x}-10}.$$

Μονάδες 6

Απάντηση:

$$\lim_{x\to 10}\frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x}-10}=\lim_{x\to 10}\frac{\frac{2x^2-200}{x^2}}{\frac{\sqrt{10x}-10}{1}}=\lim_{x\to 10}\frac{2x^2-200}{x^2\left(\sqrt{10x}-10\right)}=\lim_{x\to 10}\frac{\left(2x^2-200\right)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{x^2\left(\sqrt{10x}-10\right)\left(\sqrt{10x}+10\right)}=$$

$$\lim_{x\to 10}\frac{\left(2x^2-200\right)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{x^2\left(\left(\sqrt{10x}\right)^2-10^2\right)}=\lim_{x\to 10}\frac{\left(2x^2-200\right)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{x^2\left(10x-100\right)}=\lim_{x\to 10}\frac{2\left(x^2-100\right)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{x^2\cdot 10\left(x-10\right)}=$$

$$\lim_{x\to 10}\frac{2(x-10)(x+10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{x^2\cdot 10(x-10)}=\lim_{x\to 10}\frac{2(x+10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{10x^2}=\frac{2(10+10)\left(\sqrt{10\cdot 10}+10\right)}{10\cdot 10^2}=$$

$$\frac{2\cdot 20\left(\sqrt{100}+10\right)}{10\cdot 100}=\frac{40(10+10)}{1000}=\frac{40\cdot 20}{1000}=\frac{800}{1000}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}.$$