ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1) Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$.

Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$.

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$, αφού

$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_o\in(\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_o)=f(x_o)-\eta=0$, οπότε $f(x_o)=\eta$.

Α2) Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}\ .$$

Α3) **α) Ψ.**

β) Το αντίστροφο του θεωρήματος της μονοτονίας δεν ισχύει. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(0)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α4) **α) Λάθος**

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_f = (1,+\infty)$ και $D_g=\mathbb{R}$,

$$D_{fog} = \{x \in D_g \,/\, g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, e^x > 1\} = (0,+\infty)$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)+2}{g(x)-1} = \frac{e^x+2}{e^x-1} \text{ με } D_{fog} = (0,+\infty)$$

Β2. Για x_1, $x_2 \in (0,+\infty)$ με

$$f(g(x_1)) = f(g(x_2))$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1} = \frac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1}$$

$$\Leftrightarrow (e^{x_1}+2)(e^{x_2}-1) = (e^{x_1}-1)(e^{x_2}+2)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{e^{x_1}e^{x_2}} + 2e^{x_2} - e^{x_1} \cancel{-2} = \cancel{e^{x_1}e^{x_2}} + 2e^{x_1} - e^{x_2} \cancel{-2}$$

$$\Leftrightarrow 2e^{x_2} - e^{x_1} = 2e^{x_1} - e^{x_2}$$

$$\Leftrightarrow 3e^{x_2} = 3e^{x_1}$$

$$\Leftrightarrow e^{x_2} = e^{x_1} \Leftrightarrow x_2 = x_1.$$

Είναι

$$(fog)(x) = \frac{e^x+2}{e^x-1} = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x+2}{e^x-1} = y \Leftrightarrow e^x + 2 = y(e^x-1) \Leftrightarrow e^x + 2 = ye^x - y$$

$$\Leftrightarrow ye^x - e^x = y+2 \Leftrightarrow (y-1)e^x = y+2 \overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} e^x = \frac{y+2}{y-1}$$

$$\overset{\frac{y+2}{y-1}>0}{\Leftrightarrow} x = \ln\frac{y+2}{y-1}$$

Πρέπει

$$\frac{y+2}{y-1}>0 \Leftrightarrow y\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty) \text{ και}$$

$$x\in D_f \Rightarrow x>0 \Leftrightarrow \ln\frac{y+2}{y-1}>\ln 1 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1}-1>0 \Leftrightarrow \frac{y+2-y+1}{y-1}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{y-1}>0 \Rightarrow y>1$$

Έχουμε

$$(fog)^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \text{ με } D_{(fog)^{-1}}=(1,+\infty)$$

Β3. φ συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με

$$\varphi'(x)=\left(\ln(x+2)-\ln(x-1)\right)'=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-1}=\frac{-3}{(x+2)(x-1)}<0, \text{ για } x>1.$$

άρα φ γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

Β4. Έχουμε :

- $\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln\frac{x+2}{x-1}$

  Έστω $\frac{x+2}{x-1}=u$ με $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\left[(x+2)\frac{1}{x-1}\right]=m$

  - $\lim\limits_{x\to1^+}(x+2)=3>0$
  - $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0$ με $x-1>0$ x>1 και κοντά στο x_0 ,όποτε

    $m=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+2}{x-1}=+\infty$. Άρα $u\to+\infty$

    Επομένως $\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln\frac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x+2}{x-1}=k$

  Έστω $\frac{x+2}{x-1}=u$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x}\right]=1$. Άρα $u\to1$

  Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{u\to1}\ln u=\ln 1=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x}-\ln\lambda\right)=1-\ln\lambda \text{ και } \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x)=\lambda$$

Όμως η f είναι συνεχής στο $\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right)$ θα είναι συνεχής και στο $x_0=0$ άρα

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\Leftrightarrow 1-\ln\lambda=\lambda\Leftrightarrow \ln\lambda+\lambda-1=0,\ \lambda>0 \ \mathbf{(1)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(\lambda)=\ln\lambda+\lambda-1,\ \lambda>0$$

Η g είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(\lambda)=\frac{1}{\lambda}+1>0 \text{ για κάθε } \lambda>0.$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα οπότε και 1-1.

$$(1)\Leftrightarrow g(\lambda)=0 \overset{g(1)=0}{\Leftrightarrow} g(\lambda)=g(1)\Leftrightarrow \lambda=1.$$

Γ2) Για να αποδείξουμε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$ αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\overset{f(0)=1}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-1+x}{x(1-x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x(1-x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=1+0=1$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1 \text{ η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0=0.$$

Ας είναι ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f με τον άξονα x΄x.

Είναι

$$f'(0)=1=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \text{ άρα } \omega=\frac{\pi}{4} \text{ διότι } 0\le\omega<\pi.$$

Γ3) Είναι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & , \quad x\le 0\\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x & , \ 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$.

- Για $x<0$ είναι $f'(x)=\left(\dfrac{1}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}>0$ άρα η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο $(-\infty,0)$.

- Για $x=0$ από το ερώτημα Γ2) είναι $f'(0)=1$ άρα το 0 δεν είναι κρίσιμο σημείο.

- Για $0<x<\dfrac{3\pi}{2}$ είναι $f'(x)=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)'=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=1$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

Όμως,

$$0<x<\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow 0<\kappa\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}<\kappa\pi<\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}<\kappa\pi<\frac{5\pi}{4}\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<\kappa<\frac{5}{4}\overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow}\kappa=0,\ \kappa=1$$

Άρα

$$x=0\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4} \text{ και } x=1\cdot\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$$

Τα κρίσιμα σημεία λοιπόν είναι $x_1=\dfrac{\pi}{4}$ και $x_2=\dfrac{5\pi}{4}$.

Γ4) $\alpha'(t)=-\dfrac{\alpha(t)}{3}$, Για $x \leq 0$ είναι $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ και $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο $M(\alpha, f(\alpha))$ είναι

$$\varepsilon:\ y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha) \quad \textbf{(2)}$$

Για y=0 στη **(2)** έχουμε :

$$-\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha) \overset{\alpha\leq 0}{\Leftrightarrow} x - \alpha = -\frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha} \Leftrightarrow x = \alpha - (1-\alpha) = 2\alpha - 1$$

Το κοινό σημείο της C_f με τον άξονα x΄x είναι το Β(2α-1,0).

Τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε

$$\alpha(t_0) = -1.$$

Είναι $x_B(t) = 2\alpha(t) - 1$ οπότε

$$x_B{}'(t) = (2\alpha(t) - 1)' = 2\alpha'(t) = -2\frac{\alpha(t)}{3}.$$

Έτσι λοιπόν

$$x_B{}'(t_0) = -2\frac{\alpha(t_0)}{3} = \frac{2}{3}\ \text{μον.μηκ.}/\text{μον.χρ.}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1,\ x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = (e^x + x^2 - ex - 1)' = e^x + 2x - e,\ x \in \mathbb{R}.$$

- Η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $f'(0) = e^0 + 2\cdot 0 - e = 1 - e < 0$

  $f'(1) = e^1 + 2\cdot 1 - e = 2 > 0.$

  Οπότε, $f'(0)f'(1) < 0.$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = 0.$$

Επιπλέον, $f''(x) = (e^x + 2x - e)' = e^x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε 1-1.

Έτσι λοιπόν το x_0 είναι μοναδικό.

Για $x > x_0 \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0.$

Για $x < x_0 \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0.$

x	$-\infty$ x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η f παρουσιάζει Ολικό Ελάχιστο στο x_0.

Ακόμη,

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0 \quad \textbf{(1)}$$

Οπότε,

$$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^{\,2} - ex_0 - 1 \overset{(1)}{=} e - 2x_0 + x_0^{\,2} - ex_0 - 1$$

$$= x_0^{\,2} - (e+2)x_0 + e - 1.$$

Δ2) Για x κοντά στο x_0 ισχύει ότι

$$-1 \le \eta\mu\frac{1}{x - x_0} \le 1$$

$$\Leftrightarrow -1 + \frac{1}{f(x) - f(x_0)} \le \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\frac{1}{x - x_0} \le 1 + \frac{1}{f(x) - f(x_0)}$$

Είναι

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=f(x_0)-f(x_0)=0.$$

Αφού η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο x_0 ισχύει ότι

$$f(x)\geq f(x_0)\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)\geq 0$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=x_0$.

Έτσι λοιπόν για x κοντά στο x_0 είναι

$$f(x)-f(x_0)>0.$$

Οπότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty$.

Άρα,

$$\lim_{x\to x_0}\left(-1+\frac{1}{f(x)-f(x_0)}\right)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{1}{f(x)-f(x_0)}\right)=+\infty.$$

Με τη βοήθεια του Κριτηρίου Παρεμβολής έχουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\frac{1}{x-x_0}\right)=+\infty.$$

Δ3) Για $x\in(x_0,1)$ εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$f(x)+x=x_0 \Leftrightarrow f(x)+x-x_0=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=f(x)+x-x_0,\ x\in\mathbb{R}$$

- Η $g(x)$ συνεχής στο $[x_0,1]$ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $g(1)=f(1)+1-x_0\overset{f(1)=e^1+1^2-e-1=0}{=}1-x_0>0$ αφού $x_0>1$.

$g(x_0)=f(x_0)+x_0-x_0=f(x_0)<0$ διότι

$x_0<1$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_0,1]$ οπότε

$$f(x_0)<f(1)\overset{f(1)=0}{\Leftrightarrow} f(x_0)<0.$$

Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano οπότε υπάρχει $\rho\in(x_0,1)$ τέτοιο ώστε

$$g(\rho)=0.$$

Επιπλέον, η g είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x)=\left(f(x)+x-x_0\right)'=f'(x)+1,\ x\in\mathbb{R}.$$

Για $x\in(x_0,1)\Rightarrow x>x_0 \overset{f'\nearrow[x_0,+\infty)}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_0)$

$$\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f'(x)+1>0.$$

Οπότε $g'(x)>0$ για κάθε $x\in(x_0,1)$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα οπότε και 1-1 άρα υπάρχει το πολύ ένα $\rho\in(x_0,1)$ τέτοιο ώστε

$$g(\rho)=0.$$

Τελικά υπάρχει μοναδικό $\rho\in(x_0,1)$ τέτοιο ώστε

$$g(\rho)=0.$$

Δ4) Για κάθε $k\in(\rho,1)$ η προς απόδειξη ανισότητα ισοδύναμα γράφεται

$$f(x_0)>f(\rho)\left(f'(k)+1\right)\Leftrightarrow f(x_0)>f(\rho)f'(k)+f(\rho)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0)-f(\rho)>f(\rho)f'(k)\ \mathbf{(2)}$$

Όμως από το ερώτημα **Δ3)** έχουμε

$$g(\rho)=0\Leftrightarrow f(\rho)+\rho=x_0\Leftrightarrow f(\rho)=x_0-\rho.$$

Η **(2)** $\Leftrightarrow f(x_0)-f(\rho)>(x_0-\rho)f'(k)$

$$\overset{x_0<\rho\Leftrightarrow x_0-\rho<0}{\Leftrightarrow}\frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}<f'(k)\ \mathbf{(3)}.$$

● Η f είναι συνεχής στο $[x_0,\rho]$.

● Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,ρ).

Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(x_0,\rho)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}.$$

Η σχέση **(3)** ισοδύναμα γράφεται $f'(\xi)<f'(k)\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}\xi<k$ που ισχύει αφού

$$\xi\in(x_0,\rho)\Rightarrow\xi<\rho \text{ και } k\in(\rho,1)\Rightarrow k>\rho.$$

.

ΚΑΛΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ !!!