ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
(ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 111 θεώρημα παράγωγος αθροίσματος

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 104 ορισμός

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 74 διατύπωση θεωρήματος Bolzano

Α4. **1.** ΛΑΘΟΣ

2. Αν $f(x)=x-2$, $x\in R$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$,

$\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty$. Δηλαδή το $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.

Α5. **1.** ΣΩΣΤΟ

2. ΣΩΣΤΟ

3. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x)=\frac{3x+1}{x-3}$, $x\neq 3$

Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$ με

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\frac{3x_1+1}{x_1-3}=\frac{3x_2+1}{x_2-3}\Leftrightarrow(3x_1+1)(x_2-3)=(3x_2+1)(x_1-3)$$

$$\Leftrightarrow 3x_1x_2-9x_1+x_2-3=3x_1x_2-9x_2+x_1-3\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι '1−1', οπότε αντιστρέφεται.

Β2.

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\frac{3x+1}{x-3}\Leftrightarrow yx-3y=3x+1$$

$$\Leftrightarrow yx-3x=3y+1\Leftrightarrow(y-3)x=3y+1\ (1)$$

για y=3 : $(1)\Rightarrow 0x=11$ αδύνατο

Άρα $f^{-1}(y)=\frac{3y+1}{y-3}, y\neq 3$

Άρα $f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{x-3}, x\neq 3$

Ισχύει $D_f=D_{f^{-1}}=\mathbb{R}-\{3\}$

Επιπλέον $f(x)=f^{-1}(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$ για κάθε $x\neq 3$

Άρα $f=f^{-1}$.

B3. Για να ορίζεται η fof πρέπει

$$\begin{cases} x\in D_f \\ \text{και} \\ f(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ \dfrac{3x+1}{x-3}\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ 3x+3\neq 3x-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ 3\neq -9 \end{cases}$$

Άρα $D_{fof}=\mathbb{R}-\{3\}$

Αρκεί ν.δ.ο.
$$\begin{aligned} &(fof)(x)=x \\ \Leftrightarrow\ & f(f(x))=x \\ \Leftrightarrow\ & f(f^{-1}(x))=x \end{aligned}$$

που ισχύει για κάθε $x\neq 3$

B4.

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}}\left(f(x)\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right)=\lim_{x\to -\frac{1}{3}}\left(\frac{3x+1}{x-3}\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right)=0$$

αφού

$$\begin{aligned} & -1\leq \eta\mu\frac{1}{3x+1}\leq 1 \\ \Leftrightarrow\ & \left|\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right|\leq 1 \\ \Leftrightarrow\ & \left|\frac{3x+1}{x-3}\right|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right|\leq\left|\frac{3x+1}{x-3}\right| \\ \Leftrightarrow\ & \left|\frac{3x+1}{x-3}\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right|\leq\left|\frac{3x+1}{x-3}\right| \\ \Leftrightarrow\ & -\left|\frac{3x+1}{x-3}\right|\leq\frac{3x+1}{x-3}\eta\mu\frac{1}{3x+1}\leq\left|\frac{3x+1}{x-3}\right| \end{aligned}$$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{3x+1}{x-3}=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\left(-\left|\dfrac{3x+1}{x-3}\right|\right)=\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\left|\dfrac{3x+1}{x-3}\right|=0$

Επομένως λόγω του κριτηρίου παρεμβολής θα έχουμε

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}}\left(\frac{3x+1}{x-3}\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right)=0$$

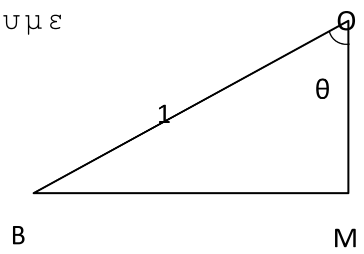
ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$E_{AB\Gamma}=\dfrac{1}{2}(B\Gamma)\cdot(AM)$ **(1)**

Από το τρίγωνο για $\theta\in(0,\pi)$ έχουμε

$\eta\mu\theta=\dfrac{BM}{OB}=\dfrac{BM}{1}=BM$



$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{OM}{OB}=\frac{OM}{1}=OM$$

- $B\Gamma=2BM=2\eta\mu\theta$
- $AM=AO+OM=1+\sigma\upsilon\nu\theta$

Οπότε

(1) $\Rightarrow E_{AB\Gamma}=\frac{1}{2}\cdot 2\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)=\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta),\quad \theta\in(0,\pi)$.

Γ2.

$$E'(\theta)=(1+\sigma\upsilon\nu\theta)'\eta\mu\theta+(1+\sigma\upsilon\nu\theta)(\eta\mu\theta)'=$$
$$=-\eta\mu\theta\cdot\eta\mu\theta+(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\sigma\upsilon\nu\theta=$$
$$=-\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1$$

$$E'(\theta)=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=-1 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}$$

$$E'(\theta)>0\Leftrightarrow 2\left(\sigma\upsilon\nu\theta-\frac{1}{2}\right)(\sigma\upsilon\nu\theta+1)>0$$

$\sigma\upsilon\nu\theta+1>0$ για $x\in(0,\pi)$

$$\sigma\upsilon\nu\theta-\frac{1}{2}>0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta>\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\underset{x\in(0,\pi)}{\overset{\sigma\upsilon\nu\downarrow}{\Leftrightarrow}}\theta<\frac{\pi}{3}$$

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$E'(\theta)$		+	0	−	
$E(\theta)$		↗		↘	
			Ο.Μ.		

Για $\theta=\frac{\pi}{3}$ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

Γ3. $E(\theta)=\frac{3}{4}$

- $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ η Ε είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$E(A_1)=\left(\lim_{\theta\to0^+}E(\theta),E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\lim_{\theta\to0^+}E(\theta)=\lim_{\theta\to0^+}(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta=0$$

$$E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right)\eta\mu\frac{\pi}{3}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Άρα $E(A_1)=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$.

Επειδή $\frac{3}{4}\in E(A_1)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\theta_1\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ τέτοιο, ώστε $E(\theta_1)=\frac{3}{4}$.

Όμως η $\uparrow E$ στο $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ οπότε τι θ_1 μοναδικό.

- $\theta\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ η Ε είναι γνησίως φθίνουσα άρα το πεδίο τιμών $E(A_2)=\left(\lim\limits_{\theta\to\pi^-}E(\theta),E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

  $\lim\limits_{\theta\to\pi^-}E(\theta)=\lim\limits_{\theta\to\pi^-}(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta=0$

  Άρα $E(A_2)=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$.

  $\frac{3}{4}\in E(A_2)$ άρα υπάρχει τουλάχιστον $\theta_2\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$: $E(\theta_2)=\frac{3}{4}$

  Όμως η Ε είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ οπότε το θ_2 μοναδικό.

Γ4. Επειδή η $E(\theta)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ ισχύει το Θ.Μ.Τ. για την Ε στα $\left[\theta_1,\frac{\pi}{3}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{3},\theta_2\right]$.

Δηλαδή υπάρχουν:

- $\xi_1\in\left(\theta_1,\frac{\pi}{3}\right)$:

$$E'(\xi_1)=\frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right)-E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3}-\theta_1}\Leftrightarrow\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)E'(\xi_1)=\frac{3\sqrt{3}}{4}-E(\theta_1)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)E'(\xi_1)=\frac{3\sqrt{3}-3}{4}\qquad\textbf{(1)}$$

- $\xi_2\in\left(\frac{\pi}{3},\theta_2\right)$:

$$E'(\xi_2)=\frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right)-E(\theta_2)}{\frac{\pi}{3}-\theta_2}\Leftrightarrow\left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)E'(\xi_2)=\frac{3\sqrt{3}}{4}-E(\theta_2)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)E'(\xi_2)=\frac{3\sqrt{3}-3}{4}\qquad\textbf{(2)}$$

Από **(1)** και **(2)** $\Leftrightarrow\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)E'(\xi_1)=\left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)E'(\xi_2)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{\lambda x}\cdot\lambda=\ln x+1-\frac{1}{x}$$

Για $x=1$ παρατηρώ ότι $f'(1)=\ln x+1-\frac{1}{1}=0$.

$f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x+1}{x^2}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Άρα η f' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

- $x>1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(1)\Rightarrow f'(x)>0$ δηλαδή η f γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$
- $0<x<1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0$ δηλαδή η f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$.

θ	0 1 $+\infty$		
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↘		↗
		Ο.Ε.	

Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=1\cdot\ln 1-\ln\lambda=-\ln\lambda$.
Άρα το σημείο του ελάχιστου είναι $A(1,-\ln\lambda)$ που ανήκει στην ευθεία $\boxed{x=1}$.

Δ2. $x^x\ge\lambda x \overset{x>0}{\Rightarrow} \ln x^x\ge\ln(\lambda x)\Leftrightarrow x\ln x-\ln(\lambda x)\ge 0$

$\Leftrightarrow f(x)\ge 0$

$-\ln\lambda=0\Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda=1}}$

Δ3. Για $\lambda=1$ θ.ν.δ.ο. $y=x$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της C_g.

$g(x)=x^x=e^{x\ln x}$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$

$g'(x)=e^{x\ln x}(x\ln x)'=x^x\left(\ln x+x\frac{1}{x}\right)=x^x(\ln x+1)$

$g''(x)=(x^x)'(\ln x+1)+x^x(\ln x+1)'=x^x(\ln x+1)^2+x^x\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Άρα g' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Άρα η g κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Η εξίσωση $g(x)=x\Leftrightarrow x^x=x$ για $x=1$ ισχύει η ισότητα

$\varepsilon\varphi_g$: $y-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=1(x-1)\Leftrightarrow y=x$

Άρα η $y=x$ είναι εφαπτομένη της C_g στο $x=1$.

Επειδή η g είναι κυρτή η $y=x$ είναι μοναδική εφαπτομένη με $g(x)\ge x$ με «=» να ισχύει μόνο για $x=1$.

Δ4. **i)** Η h είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Έχουμε $h(0)=1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$

με $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}=e^0=1=h(0)$.

Άρα η h συνεχής και στο $x_0=1$ δηλαδή συνεχής στο $[0,+\infty)$.

ii) Θέτω

$\phi(x)=x^{2020}\left(3-2\int_1^2 g(t)dt\right)+(1-x)\int_0^1 h(1-t)dt$ με $x\in[0,1]$.

- Η φ συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική.
- $\phi(1)=3-2\int_1^2 g(t)dt$

  επειδή $g(x)\geq x\Rightarrow\int_1^2 g(x)dx>\int_1^2 xdx$

  (αφού το "=" ισχύει μόνο για $x=1$)

  Άρα $\int_1^2 g(x)dx>\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_1^2\Leftrightarrow\int_1^2 g(x)dx>\dfrac{4}{2}-\dfrac{1}{2}$

  $\Leftrightarrow\int_1^2 g(x)dx>\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow 2\int_1^2 g(x)dx>3\Leftrightarrow\phi(1)<0$.
- $\phi(0)=\int_0^1 h(1-t)dt$

  Θέτω $1-y=x\Leftrightarrow t=1-x$, $dt=-dt$

  για $t=0$ $x_1=1$

  $t=1$ $x_2=0$

  Οπότε $\phi(0)=-\int_1^0 h(x)dx=\int_0^1 h(x)dx>0$

  αφού $h(x)=x^x>0$ για κάθε $x>0$.

  Άρα ισχύει το θ. Bolzano για την f στο $[0,1]$.

  Επομένως υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $\phi(x)>0$ στο $(0,1)$.