

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΕΠΑΛ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
18 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1) Γενικά μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε

$$x_0 \in A \text{ ισχύει } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

A2) α) Λάθος

Η συνάρτηση f γράφεται $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

• όταν $h < 0$, έχουμε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$,
ενώ

• όταν $h > 0$, έχουμε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$

που σημαίνει ότι δεν υπάρχει το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$

β) Σωστό

γ) Λάθος

Ο τύπος της σχετικής συχνότητας είναι $f_i = \frac{v_i}{v}$, όπου v_i η συχνότητα της τιμής x_i και v το μέγεθος του δείγματος.

A3) α) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

β) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ με $x > 0$

γ) $(\sin x)' = \cos x$

A4) Για τη συνάρτηση $f(x)=x^2$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^2 - (x_0)^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0)^2 + 2x_0h + h^2 - (x_0)^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0)^2 + 2x_0h + h^2 - (x_0)^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (2x_0 + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0 \end{aligned}$$

για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$

Άρα $f'(x) = (x^2)' = 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

ΘΕΜΑ Β

B1) Αφού το 40% των μαθητών δεν διάβασε κανένα βιβλίο συμπεραίνουμε ότι

$$f_1\% = 40.$$

Έτσι

$$F_1\% = f_1\% = 40.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$F_2\% = 70 \Leftrightarrow F_1\% + f_2\% = 70 \Leftrightarrow 40 + f_2\% = 70$$

$$\Leftrightarrow f_2\% = 70 - 40 \Leftrightarrow f_2\% = 30.$$

Επίσης

$$F_3\% = 90 \Leftrightarrow F_2\% + f_3\% = 90 \Leftrightarrow 70 + f_3\% = 90$$

$$\Leftrightarrow f_3\% = 20$$

Έτσι λοιπόν

$$f_3 = 0,2 \Leftrightarrow \frac{v_3}{v} = 0,2 \Leftrightarrow \frac{10}{v} = 0,2 \Leftrightarrow 10 = 0,2v$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{0,2} = v \Leftrightarrow v = \frac{10 \cdot 10}{0,2 \cdot 10} \Leftrightarrow v = \frac{100}{2} \Leftrightarrow v = 50.$$

Θα συμπληρώσουμε τη στήλη των συχνοτήτων

$$f_1 = \frac{v_1}{v} \Leftrightarrow 0,4 = \frac{v_1}{50} \Leftrightarrow v_1 = 50 \cdot 0,4 \Leftrightarrow v_1 = 20.$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow 0,3 = \frac{v_2}{50} \Leftrightarrow v_2 = 50 \cdot 0,3 \Leftrightarrow v_2 = 15.$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} \Leftrightarrow 0,1 = \frac{v_4}{50} \Leftrightarrow v_4 = 50 \cdot 0,1 \Leftrightarrow v_4 = 5.$$

Για τη στήλη των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων έχουμε

$$N_1 = v_1 = 20$$

$$N_2 = N_1 + v_2 = 20 + 15 = 35.$$

$$N_3 = N_2 + v_3 = 35 + 10 = 45.$$

$$N_4 = v = 50.$$

Τελικά ο πίνακας συμπληρωμένος είναι

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0	20	40	20	40
1	15	30	35	70
2	10	20	45	90
3	5	10	50	100
Σύνολο	50	100		

B2) Το ποσοστό των μαθητών που έχει διαβάσει τρία βιβλία αντιστοιχεί στην σχετική συχνότητα

$$f_4 = 0,1 = 10\%.$$

B3) Το πλήθος των μαθητών που διάβασαν τουλάχιστον ένα βιβλίο είναι όσοι μαθητές διάβασαν 1 βιβλίο, 2 βιβλία, 3 βιβλία δηλαδή είναι

$$k = v_2 + v_3 + v_4 = 15 + 10 + 5 = 30 \text{ μαθητές.}$$

B4) Οι μαθητές που διάβασαν το πολύ 2 βιβλία είναι όσοι μαθητές διάβασαν 2 βιβλία, 1 βιβλίο, 0 βιβλία και το αντίστοιχο ποσοστό είναι

$$p = f_1 + f_2 + f_3 = 0,4 + 0,3 + 0,2 = 0,9 = 90\% \text{ των μαθητών.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(-1, -2)$ οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τον τύπο της.

Έτσι λοιπόν έχουμε

$$f(-1) = -2 \quad (1).$$

Όμως

$$f(-1) = (-1)^3 - \lambda(-1)^2 + 2 = -1 - \lambda + 2 = 1 - \lambda$$

Οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει

$$1 - \lambda = -2 \Leftrightarrow -\lambda = -2 - 1 \Leftrightarrow -\lambda = -3 \Leftrightarrow \lambda = 3.$$

Γ2) Για $\lambda = 3$ ο τύπος της συνάρτησης f είναι

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Οπότε η πρώτη παράγωγος συνάρτηση της f είναι

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 - 3x^2 + 2)' = (x^3)' - (3x^2)' + (2)' \\ &= 3x^2 - 3(x^2)' + 0 = 3x^2 - 3(2x) = 3x^2 - 6x, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Η δεύτερη παράγωγος συνάρτηση της f θα προκύψει παραγωγίζοντας την πρώτη παράγωγο της f που βρήκαμε ακριβώς παραπάνω.

Έτσι λοιπόν είναι

$$\begin{aligned} f''(x) &= (3x^2 - 6x)' = (3x^2)' - (6x)' = 3(x^2)' - 6(x)' \\ &= 3(2x) - 6 \cdot 1 = 6x - 6, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Γ3) Αρχικά θα βρούμε τις ρίζες της παραγώγου συνάρτησης της f .

Έτσι λοιπόν έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2. \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
f	↗		↘	↗

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι

- Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ και στο διάστημα $\Delta_3 = [2, +\infty)$.
- Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $\Delta_2 = [0, 2]$.
- Η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x_1 = 0$ με τιμή
 $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 = 2$
- Η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x_2 = 2$ με τιμή

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2.$$

Γ4) Για το ζητούμενο όριο έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + 3}{f''(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 6x + 3}{6x - 6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 2x + 1)}{6(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 \overset{0}{0}}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{2 \cancel{(x-1)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Παραγωγίζοντας την συνάρτηση

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)^{20} \text{ έχουμε}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[(x^2 + 4x + 5)^{20} \right]' = 20(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x^2 + 4x + 5)' = \\ &= 20(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (2x + 4) \\ &= 20(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot 2(x + 2) \\ &= 40(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x + 2), \end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ2. Το ζητούμενο όριο παρατηρούμε ότι είναι η τιμή της παραγώγου συνάρτησης της f για $x = -2$. Δηλαδή

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} &= f'(-2) \\ &= f'(-2) = 40 \left((-2)^2 + 4(-2) + 5 \right)^{19} \cdot (-2+2) \\ &= 40 \left((-2)^2 + 4(-2) + 5 \right)^{19} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Δ3. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο όπου η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ οπότε

$$\lambda_{\epsilon\phi} = 0$$

Δηλαδή

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 40(x_0^2 + 4x_0 + 5)^{19} \cdot (x_0 + 2) = 0$$

- $x_0^2 + 4x_0 + 5 = 0$ που είναι αδύνατη αφού η διακρίνουσα

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 5 = -4 < 0$$

- $x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2$

$$\text{με } f(-2) = \left((-2)^2 + 4(-2) + 5 \right)^{20} = (4 - 8 + 5)^{20} = 1^{20} = 1$$

Οπότε το σημείο M είναι το

$$M(-2, f(-2)) = (-2, 1)$$

Επομένως

$$\lambda_{\epsilon\phi} = f'(-2) = 0$$

Η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι

$$y = f'(-2)x + \beta \Leftrightarrow y = 0 \cdot x + \beta \Leftrightarrow y = \beta$$

Επειδή το σημείο M είναι σημείο της εφαπτόμενης η εξίσωση θα είναι

$$y = 1$$

Δ4. Έστω $A(x, 1)$ το σημείο της ευθείας $y = 1$ με $x > 0$.

Η απόσταση των σημείων A και O δίνεται από

$$\begin{aligned} (OA) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(1 - 0)^2 + (x - 0)^2} = \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Έστω } (OA) = d(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ με } x > 0$$

Επειδή ο ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος έχουμε

$$\begin{aligned} d'(x) &= \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} (x^2 + 1)' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} 2x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των σημείων Α και Ο όταν $x=1$ είναι

$$d'(1) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Φροντιστήρια ΜΠΑΧΑΡΑΚΗ