ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΓΕΛ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1. Απόδειξη Σχολικού Βιβλίου, σελ.135

Α2. Θεώρημα Σχολικού Βιβλίου, σελ.51

Α3. Ορισμός Σχολικού Βιβλίου, σελ.23

Α4. α) Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό.

Θέμα Β

Β1. Θέτουμε $u=x+1$, $x\in\mathbb{R}\Rightarrow x+1\in\mathbb{R}\Rightarrow u\in\mathbb{R}$ στην $f(x+1)=(x+1)e^{-x}$.

Οπότε

$$f(u)=u\cdot e^{-(u-1)}\Leftrightarrow f(u)=u\cdot e^{1-u},\ u\in\mathbb{R}.$$

Άρα $f(x)=x\cdot e^{1-x}$, $u\in\mathbb{R}$.

Β2. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=e^{1-x}+x\cdot e^{1-x}(1-x)'=e^{1-x}-x\cdot e^{1-x}=e^{1-x}\cdot(1-x)$$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow e^{1-x}\cdot(1-x)=0\overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow}1-x=0\Leftrightarrow x=1$.
- $f'(x)>0\Leftrightarrow e^{1-x}\cdot(1-x)>0\overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow}1-x>0\Leftrightarrow x<1$.
- $f'(x)<0\Leftrightarrow e^{1-x}\cdot(1-x)<0\overset{e^{1-x}>0}{\Rightarrow}1-x<0\Leftrightarrow x>1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	↗		↘

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Επιπλέον, παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1 το $f(1)=1$.

B3. Η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=\left(e^{1-x}\right)'(1-x)+e^{1-x}(1-x)'=\left(e^{1-x}\right)'(1-x)'(1-x)-e^{1-x}$$

$$=e^{1-x}(x-1)-e^{1-x}=e^{1-x}(x-2).$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)=0\overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow}x-2=0\Leftrightarrow x=2$$

$$f''(x)>0\Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)>0\overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow}x-2>0\Leftrightarrow x>2$$

$$f''(x)<0\Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)<0\overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow}x-2<0\Leftrightarrow x<2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
f	$\cap$		$\cup$

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,2]$ και κυρτή στο διάστημα $[2,+\infty)$.

Επιπλέον, παρουσιάζει σημείο καμπής στο $(2,f(2))$ με $f(2)=2e^{1-2}=\dfrac{2}{e}$.

Έλεγχος για κατακόρυφες ασύμπτωτες

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ δεν παρουσιάζει κατακόρυφες ασύμπτωτες, γιατί είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Έλεγχος για πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x\cdot e^{1-x}\right)\overset{\theta=1-x}{=}\lim_{\theta\to+\infty}\left[(1-\theta)\cdot e^{\theta}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{1-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e\cdot x}{e^{x}}\underset{\text{d.L.H.}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e}{e^{x}}=0,$$

άρα έχουμε οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=0$ στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{1-x}\overset{\theta=1-x}{=}\lim_{\theta\to+\infty}e^{\theta}=+\infty\ .$$

άρα δεν έχουμε ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Τελικά, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ έχει μοναδική ασύμπτωτη την ευθεία $y=0$ στο $+\infty$.

B4. (i). Έστω

- $\Delta_1=(-\infty,1]$ όπου η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής άρα

$$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),f(1)\right]=(-\infty,1].$$

- $\Delta_2=(1,+\infty)$ όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής άρα

$$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),f(1)\right)=(0,1)\ .$$

Άρα, $f(D_f)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=(-\infty,1]$.

(ii)

- αν $\lambda\in(-\infty,0]$ τότε $\lambda\in f(\Delta_1)$, $\lambda\notin f(\Delta_2)$ και επειδή η f είναι 1-1 στο Δ_1 υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=\lambda$.
- αν $\lambda\in(0,1)$ τότε $\lambda\in f(\Delta_1)$ και $\lambda\in f(\Delta_2)$ και επειδή η f είναι 1-1 σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 υπάρχουν μοναδικά $x_2\in\Delta_1$ και $x_3\in\Delta_2$ τέτοια ώστε $f(x_2)=\lambda$ και $f(x_3)=\lambda$, άρα έχουμε 2 λύσεις στο (0,1).
- αν λ=1 τότε $\lambda\in f(\Delta_1)$, $\lambda\notin f(\Delta_2)$ και επειδή η f είναι 1-1 στο Δ_1 υπάρχει μοναδικό $x_4\in\Delta_1$ τέτοιο ώστε $f(x_4)=\lambda$.
- αν $\lambda\in(1,+\infty)$ τότε $\lambda\notin f(D_f)$ οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη.
-

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $f(0)=\alpha\cdot0^3-3\cdot0^2-0+1=1\Rightarrow f(0)=1$

Έλεγχος συνέχειας

- Για $x\in(-\infty,0)$ έχουμε

$f(x)=\alpha\cdot x^3-3x^2-x+1$ που είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

- Για $x\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ έχουμε

$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ που είναι συνεχής ως τριγωνομετρική.

Θα κάνουμε έλεγχο της συνέχειας και στο $x_0=0$.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\alpha\cdot x^3-3x^2-x+1\right)=\alpha\cdot0^3-3\cdot0^2-0+1=1.$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(\sigma\upsilon\nu x)=\sigma\upsilon\nu0=1.$$

Άρα, υπάρχει το $\lim_{x\to0}f(x)=1$ και $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$.

Οπότε, η f είναι συνεχής και στο $x_0=0$,

Επομένως, η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Έλεγχος παραγωγισιμότητας στο $x_0 = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\alpha \cdot x^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} =$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\cancel{x} \cdot \left(\alpha \cdot x^2 - 3x - 1\right)}{\cancel{x}} = \alpha \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 - 1 = -1$$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

Επειδή

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2. i) ● η f συνεχής στο $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right] \subseteq D_f$

● η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = -\eta\mu x$

● $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu \dfrac{3\pi}{2} = 0 \neq f(0)$.

Επομένως , δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Rolle στο $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

ii) Για $x \in \left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ είναι

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = \kappa \cdot \pi \;\text{ με }\; \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Όμως,

$$\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 < \xi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \kappa\pi < \frac{3\pi}{2}$$

$$\overset{:\pi}{\Leftrightarrow} 0 < \kappa < \frac{3}{2} \overset{\kappa \in \mathbb{Z}}{\Rightarrow} \kappa = 1.$$

Οπότε, $\xi = \pi$.

Γ3. Έστω ότι υπάρχει $x_0 < 0$ τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη στο $\left(x_0, f(x_0)\right)$ να είναι παράλληλη στον $x'x$. Οπότε,

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 .$$

Επειδή $x\in(-\infty,0)$ είναι

$$f(x)=\alpha\cdot x^3-3x^2-x+1 \text{ με } f'(x)=3\alpha x^2-6x-1$$

οπότε έχουμε

$$f'(x_0)=0 \Leftrightarrow 3\alpha\cdot x_0^2-6x_0-1=0 \quad \textbf{(1)}$$

που είναι τριώνυμο με διακρίνουσα

$\Delta=(-6)^2-4\cdot 3\alpha(-1)=36+12\alpha<0$ αφού $\alpha<-3 \Rightarrow 12\alpha<-36 \Rightarrow 36+12\alpha<0$

Άρα η εξίσωση **(1)** είναι αδύνατη

Επομένως δεν υπάρχει $x_0<0$ τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη στο $(x_0,f(x_0))$ να είναι παράλληλη στον $x'x$.

Γ4. • Για $x\in(-\infty,0)$ έχουμε $f'(x)=3\alpha x^2-6x-1<0$ αφού $\Delta<0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

• Για $x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$ $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ με $f'(x)=-\eta\mu x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=\pi$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow -\eta\mu x>0 \Leftrightarrow \eta\mu x<0 \Leftrightarrow x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow -\eta\mu x<0 \Leftrightarrow \eta\mu x>0 \Leftrightarrow x\in(0,\pi)$

Η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$			↘			↗	

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\pi]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=\pi$ δηλαδή

$$f(x)\geq f(\pi) \Leftrightarrow f(x)\geq \sigma\upsilon\nu(\pi) \Leftrightarrow f(x)\geq -1 \text{ για κάθε } x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right].$$

Θέμα Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x)=\ln x-\frac{1}{x}$ με $x>0$.

- Η $t(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[1,e]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
- $t(1)=\ln 1-1=-1<0$ και $t(e)=\ln e-\frac{1}{e}=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}>0$.

Οπότε, $t(1)t(e)<0$.

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,e)$ τέτοιο ώστε

$$t(x_0)=0.$$

Επιπλέον,

$$t'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0 \text{ για κάθε } x>0$$

άρα η $t(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε και 1-1.

Τελικά, η εξίσωση $\ln x=\frac{1}{x}$ έχει μοναδική ρίζα x_0.

Δ2. Ισχύει ότι $\ln x_0=\frac{1}{x_0}$.

Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\ln x_0-\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}=\frac{x-x_0}{x\cdot x_0}\ ,\ x>0.$$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-x_0}{x\cdot x_0}=0\Leftrightarrow x=x_0$.
- $f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{x-x_0}{x\cdot x_0}>0\overset{x\cdot x_0>0}{\Leftrightarrow}x>x_0$.

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Με την βοήθεια του παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 το

$$f(x_0)=\ln x_0(x_0+1)-\ln x_0-1\overset{\ln x_0=\frac{1}{x_0}}{=}\frac{1}{x_0}(x_0+1)-\frac{1}{x_0}-1$$

$$=\frac{x_0+1}{x_0}-\frac{x_0+1}{x_0}=0.$$

Δ3. Η εξίσωση $g(x)=h(x)$

● για $x\le 0$ είναι αδύνατη αφού

$$xe^{-x}\le 0\Leftrightarrow g(x)\le 0 \text{ και } \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}>0\Leftrightarrow h(x)>0.$$

● για $x>0$ ισοδύναμα γράφεται

$$xe^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow \ln\left(xe^{-x}\right)=\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \ln x+\ln e^{-x}=(x+1)\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)(\ln x_0-\ln e)$$

$$\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)(\ln x_0-1)$$

$$\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)\ln x_0-x-1$$

$$\Leftrightarrow 0=(x+1)\ln x_0-\ln x-1$$

$$\Leftrightarrow f(x)=0. \quad \textbf{(1)}$$

Από το ερώτημα **Δ2)** έχουμε $f(x)\ge f(x_0)\Leftrightarrow f(x)\ge 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=x_0$.

Άρα η εξίσωση **(1)** έχει μοναδική λύση την $x=x_0$.

Οπότε, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων h και g έχουν μοναδικό κοινό σημείο $\Gamma\left(x_0, g\left(x_0\right)\right)$.

Επιπλέον,

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x},\ x \in \mathbb{R} \ \text{ και } h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \ln\frac{x_0}{e},\ x \in \mathbb{R}.$$

Για να έχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων h και g κοινή εφαπτομένη στο Γ αρκεί επιπλέον

$$g'(x_0) = h'(x_0) \Leftrightarrow e^{-x_0} - x_0 e^{-x_0} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \ln\frac{x_0}{e}$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0}\left(1 - x_0\right) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \left(\ln x_0 - 1\right). \ \textbf{(2)}$$

Όμως, $g(x_0) = h(x_0) \Leftrightarrow x_0 e^{-x_0} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}$ **(3).**

Η σχέση **(2)** ισοδύναμα γράφεται

$$e^{-x_0}\left(1 - x_0\right) = x_0 e^{-x_0}\left(\ln x_0 - 1\right)$$

$$\overset{\ln x_0 = \frac{1}{x_0}}{\Leftrightarrow} e^{-x_0}\left(1 - x_0\right) = x_0 e^{-x_0}\left(\frac{1}{x_0} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0}\left(1 - x_0\right) = x_0 e^{-x_0}\left(\frac{1 - x_0}{x_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0}\left(1 - x_0\right) = e^{-x_0}\left(1 - x_0\right) \ \text{ που ισχύει.}$$

Δ4) Η συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση των σημείων $A\left(x, f(x)\right)$ και $B\left(x, \varphi(x)\right)$ είναι η

$$d(x) = \left|f(x) - \varphi(x)\right| \overset{f(x) > \varphi(x)}{=} f(x) - \varphi(x),\ x > 0.$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

- Αν στο x_0 η συνάρτηση $\varphi(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη και επειδή $D_\varphi = (0, +\infty)$ τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο.
- Αν στο x_0 η συνάρτηση $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη τότε
  – η συνάρτηση $d(x)$ παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 (ελάχιστο).

– η συνάρτηση $d(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με

$$d'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0).$$

– το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $d(x)$.

Από Θ. Fermat έχουμε

$$d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - \varphi'(x_0) = 0 \overset{f'(x_0)=0}{\Leftrightarrow} \varphi'(x_0) = 0$$

οπότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο.

Σε κάθε περίπτωση, το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της $\varphi(x)$.