# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**ΕΠΑΛ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### Θέμα Α

**Α.1 (Σχολικό βιβλίο σελ. 65)**

Απόλυτη συχνότητα (frequency) $\nu_i$, ονομάζεται ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή $x_i$ της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων. Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος ν του δείγματος, δηλαδή

$$\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa=\nu$$

**Α.2 . (Σχολικό βιβλίο σελ. 28)**

Έχουμε

$$f(x+h)-f(x)=c-c=0$$

και για $h\neq 0$, $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$

Επομένως, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$ άρα $\boxed{c'=0}$

**Α.3. α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος

**Α.4.**

**α.** $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ με $x\neq 0$

**β.** $\left(x^\nu\right)'=\nu x^{\nu-1}$ όπου ν φυσικός αριθμός

**γ.** $\left(c\cdot f(x)\right)'=c\cdot f'(x)$ όπου $c\in\mathbb{R}$ και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

## Θέμα Β

**Β.1** Η συνάρτηση $f(x)=x^2-\alpha x+2$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Επειδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο με τετμημένη 1 ισχύει ότι

$$f(1)=0 \Leftrightarrow 1^2-\alpha\cdot 1+2=0 \Leftrightarrow 3-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=3.$$

**Β.2** Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει

$$x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1 \text{ και } x\neq 1$$

Οπότε το πεδίο ορισμού $D_g$ της συνάρτησης g είναι

$$D_g=\mathbb{R}-\{-1,1\} \text{ ή αλλιώς } D_g=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$$

και για α=3 ο τύπος της συνάρτησης g είναι

$$g(x)=\frac{f(x)}{x^2-1}=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}.$$

**Β.3.** Για α=3 το όριο γίνεται

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$$

Παρατηρούμε ότι το όριο του αριθμητή και το όριο του παρονομαστή είναι ίσα με μηδέν.

Θα παραγοντοποιήσουμε τόσο τον αριθμητή όσο και τον παρονομαστή.

Ο αριθμητής $x^2-3x+2$ είναι τριώνυμο με ρίζες τις x=1 και x=2 οπότε παραγοντοποιείται και γίνεται

$$x^2-3x+2=(x-1)(x+1)$$

Ο παρονομαστής είναι διαφορά τετραγώνων $x^2-1=(x-1)(x+1)$

Επομένως η g τελικά έχει τύπο

$$g(x)=\frac{f(x)}{x^2-1}=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{x-2}{x+1}.$$

Το όριο γίνεται

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x+1}=\frac{1-2}{1+1}=-\frac{1}{2}.$$

**Β.3.** Για α=3 η συνάρτηση f γίνεται

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

και για x=0 έχουμε

$$f(0) = 0^2 - 3\cdot 0 + 2 \Leftrightarrow f(0) = 2\,.$$

Άρα το σημείο $M(0, f(0))$ είναι το σημείο $M(0,2)$

Η παράγωγος της συνάρτησης f είναι

$$f'(x) = \left(x^2 - 3x + 2\right)' = \left(x^2\right)' - (3x)' + 2' = 2x - 3$$

και

$$f'(0) = 2\cdot 0 - 3 = -3\,.$$

Η εξίσωση της εφαπτόμενης στο Μ είναι

$$\varepsilon:\ y = f'(0)\cdot x + \beta \Leftrightarrow y = -3x + \beta \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή όμως το σημείο $M(0,2)$ είναι και σημείο της εφαπτομένης (ε)

για x=0 και y=2 από τη σχέση **(1)** έχουμε

$$2 = -3\cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2$$

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

στο σημείο της $M(0,2)$ είναι

$$\varepsilon:\ y = -3x + 2.$$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** • **Αρχικά θα συμπληρώσουμε την στήλη των κεντρικών τιμών** $x_i$ .

Κάθε κεντρική είναι ίση με το ημιάθροισμα των άκρων κάθε κλάσης.

Έτσι λοιπόν έχουμε

$$x_1 = \frac{4+8}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x_2 = \frac{8+12}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$x_3 = \frac{12+16}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

$$x_4 = \frac{16+20}{2} = \frac{36}{2} = 18\,.$$

| Έτη υπηρεσίας $[\ldots,\ldots)$ | Κεντρική τιμή $x_i$ |
|---|---|
| **[4,8)** | 6 |
| **[8,12)** | 10 |
| **[12,16)** | 14 |
| **[16,20)** | 18 |
| **Σύνολο** | |

● **Στη συνέχεια θα συμπληρώσουμε την στήλη των σχετικών συχνοτήτων** $f_i$

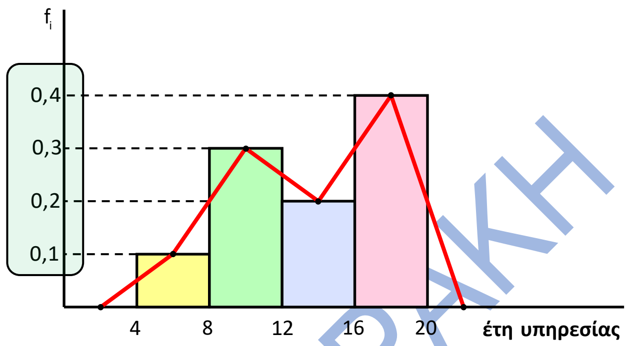
Με τη βοήθεια του δοσμένου ιστογράμματος έχουμε ότι

$f_1 = 0,1$

$f_2 = 0,3$

$f_3 = 0,2$

$f_4 = 0,4$




● **Στη συνέχεια θα συμπληρώσουμε την στήλη των συχνοτήτων** $v_i$ **.**

Από τα δεδομένα γνωρίζουμε ότι ο πληθυσμός είναι ίσος με 50.

Δηλαδή

$$v = 50.$$

Επίσης ισχύει ότι

$$f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = f_i \cdot v .$$

Έτσι λοιπόν,

$$v_2 = f_2 \cdot v = 0,3 \cdot 50 = 15.$$

$$v_3 = f_3 \cdot v = 0,2 \cdot 50 = 10.$$

● **Τέλος, θα συμπληρώσουμε την στήλη των τόξων των κυκλικών τμημάτων** $\alpha_i$ **.**

Ισχύει ότι

$$\alpha_i = 360^o \cdot f_i .$$

Έτσι λοιπόν,

$$\alpha_2 = 360^o \cdot f_2 = 360^o \cdot 0,3 = 108^o$$

$$\alpha_3 = 360^o \cdot f_3 = 360^o \cdot 0,2 = 72^o$$

Ο πίνακας συμπληρωμένος φαίνεται παρακάτω

| Έτη υπηρεσίας [...,....) | Κεντρική τιμή $x_i$ | Συχνότητα $\nu_i$ | Σχετική Συχνότητα $f_i$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|
| **[4,8)** | 6 | 5 | 0,1 | 36° |
| **[8,12)** | 10 | 15 | 0,3 | 108° |
| **[12,16)** | 14 | 10 | 0,2 | 72° |
| **[16,20)** | 18 | 20 | 0,4 | 144° |
| **Σύνολο** | | 50 | 1 | 360° |

**Γ2.** Τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας έχουν συμπληρώσει όσοι εκπαιδευτικοί βρίσκονται στις κλάσεις

**[8,12), [12,16)** και **[16,20)**.

Έτσι λοιπόν, το ζητούμενο πλήθος είναι

$\nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 15 + 10 + 20$

$= 45$ εκπαιδευτικοί.

| Έτη υπηρεσίας [...,....) | Συχνότητα $\nu_i$ |
|---|---|
| **[4,8)** | 5 |
| **[8,12)** | 15 |
| **[12,16)** | 10 |
| **[16,20)** | 20 |
| **Σύνολο** | 50 |

*Σημείωση: Η αρχική διατύπωση ήταν «το πολύ 16 έτη υπηρεσίας», τελικά έγινε διόρθωση στην εξής έκφραση «**λιγότερο** από 16 έτη υπηρεσίας».*

**Γ3.** Οι εκπαιδευτικοί που έχουν λιγότερα από 16 έτη είναι όσοι βρίσκονται στις κλάσεις

**[4,8), [8,12)** και **[12,16)**.

Έτσι λοιπόν το ζητούμενο ποσοστό είναι

$f_1 + f_2 + f_3 = 0,1 + 0,3 + 0,2$

$= 0,6$ δηλαδή το **60%** .

| Έτη υπηρεσίας [...,....) | Σχετική Συχνότητα $f_i$ |
|---|---|
| **[4,8)** | 0,1 |
| **[8,12)** | 0,3 |
| **[12,16)** | 0,2 |
| **[16,20)** | 0,4 |
| **Σύνολο** | 1 |

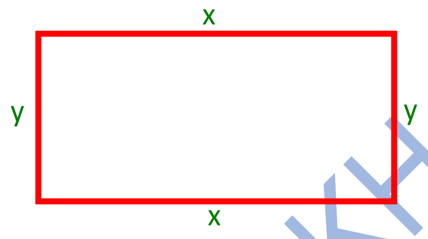
**Γ4.** Το εμβαδόν του πολυγώνου των σχετικών συχνοτήτων είναι ίσο με το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων άρα είναι ίσο με 1.

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1)** Το οικόπεδο έχει σχήμα ορθογώνιο με μήκος x μέτρα και πλάτος y μέτρα.

Έτσι λοιπόν, το εμβαδόν του θα είναι

$$E = x \cdot y \ \textbf{(1)}.$$




Γνωρίζουμε όμως ότι η περίμετρος του οικοπέδου είναι ίση με 80 μέτρα.

Έτσι λοιπόν, συμπεραίνουμε ότι

$$2x + 2y = 80 \overset{:2}{\Leftrightarrow} x + y = 40 \Leftrightarrow y = 40 - x.$$

Αντικαθιστούμε στην σχέση **(1)** το y με $40 - x$ και έχουμε

$$E = x \cdot (40 - x) = 40x - x^2 = -x^2 + 40x.$$

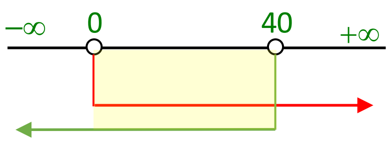
Αφού το x είναι μήκος πλευράς του ορθογωνίου έχουμε ότι

$$x > 0.$$

Αφού το y είναι πλάτος πλευράς του ορθογωνίου έχουμε ότι

$$y > 0 \Leftrightarrow 40 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -40 \Leftrightarrow x < 40.$$

Συναληθεύοντας τους περιορισμούς για το x προκύπτει ότι




$$x \in (0, 40).$$

Τελικά το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = -x^2 + 40x,\ x \in (0, 40).$$

**Δ2)** Έχουμε ότι

$$E'(x) = \left(-x^2 + 40x\right)' = \left(-x^2\right)' + (40x)' = -\left(x^2\right)' + 40(x)'$$
$$= -2x + 40.$$

- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 40 = 0 \Leftrightarrow -2x = -40 \Leftrightarrow x = 20.$
- $E'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 40 > 0 \Leftrightarrow -2x > -40 \Leftrightarrow 0 < x < 20.$
- $E'(x) < 0 \Leftrightarrow -2x + 40 < 0 \Leftrightarrow -2x < -40 \Leftrightarrow 20 < x < 40.$

| x | 0 | | 20 | | 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| $E'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $E(x)$ | | ↗ | | ↘ | |

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η συνάρτηση $E(x)$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $(0,20]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $[20,40)$.

**Δ3)** Με τη βοήθεια του πίνακα του ερωτήματος Δ2) συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο για

$$x = 20$$

και η μέγιστη τιμή του ισούται με

$$\begin{aligned} E(20) &= -20^2 + 40 \cdot 20 \\ &= -400 + 800 \\ &= 400. \end{aligned}$$

**Δ4)** Παρατηρούμε ότι

- το $x_A = 29{,}5$ ανήκει στο διάστημα $[20,40)$ και
- το $x_B = 34{,}2$ ανήκει στο διάστημα $[20,40)$.

Όμως , η συνάρτηση $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[20,40)$.

Έτσι λοιπόν έχουμε

$$29{,}5 < 34{,}2 \Leftrightarrow x_A < x_B \Leftrightarrow E(x_A) > E(x_B).$$

Τελικά, το οικόπεδο Α έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το οικόπεδο Β.