

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η γραφική παράσταση της  $|f|$  αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της  $f$  που βρίσκονται πάνω από τον άξονα  $x'$  και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα  $x'$ , των τμημάτων της γραφικής παράστασης της  $f$  που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.

**β)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , ισχύει:

$$\text{Αν } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0, \text{ τότε } f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

**γ)** Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης  $f$  μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της  $f$ .

**δ)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  για  $x$  κοντά στο  $x_0$ .

**ε)** Μια πολυωνυμική συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } f(x) = x^2 + 1 \text{ και}$$

$$g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } g(x) = \sqrt{x-2} .$$

**Β1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g \circ f$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$  και τύπο  $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ .

**Μονάδες 7**

**Β2.** Να εξετάσετε εάν υπάρχει το όριο στο  $x_0 = 2$  της συνάρτησης  $h: A - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $h(x) = \frac{(g \circ f)(x)}{x-2}$ .

**Μονάδες 9**

**Β3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g \circ f$  στο σημείο με τετμημένη  $x_1 = \sqrt{2}$ .

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει ότι

$$f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{2} \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και της οποίας η γραφική παράσταση } C_f$$

διέρχεται από το σημείο  $M(1, 1)$ . Έστω το σημείο  $A(\frac{3}{2}, 0)$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \in [0, +\infty)$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι το σημείο  $M$  είναι το μοναδικό σημείο της  $C_f$  που απέχει από το σημείο  $A$  τη μικρότερη απόσταση.

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $M$  είναι κάθετη στην ευθεία  $AM$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$ , την ευθεία  $x = 1$  και την ευθεία  $x = 2$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο  $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) + f(1-x) = 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 4**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x=1$  ισούται με  $\frac{1}{2}$ .

**Μονάδες 8**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**